

Dalla legge di Hooke alle onde nei mezzi elastici

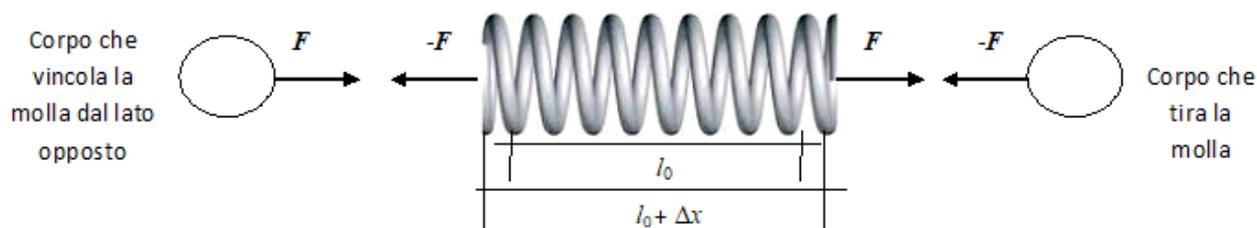
1. INTRODUZIONE

Questo breve documento accompagna il gadget allegato alla cartella congressuale del 56° Congresso Nazionale dell'Associazione per l'Insegnamento della Fisica: una molla di plastica formata da 40 spire. "Sull'Onda della Didattica" è il titolo/tema del Congresso e la molla è sufficientemente lunga da permettere di realizzare onde longitudinali ben visibili. La si tenga il più possibile orizzontale, con una lunghezza di 1,5 metri e la si "pizzichi" da un estremo con un colpetto secco oppure si rilascino rapidamente due o tre spire inizialmente compresse; così facendo si produce un'onda che si propaga fino all'estremo opposto. Sono anche visibili modesti fenomeni di riflessione.

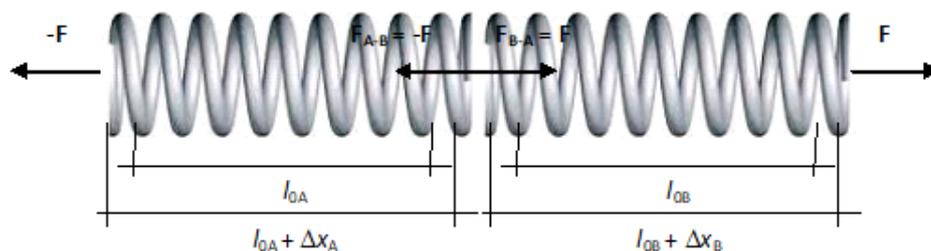
Lo scopo di queste pagine è quello di analizzare il comportamento di una molla fino ad ottenere l'equazione delle onde longitudinali in essa. Il paragrafo che segue riprende la legge di Hooke per condurre fino al comportamento di molle collegate in serie. Il terzo paragrafo utilizza il modello della molla per i materiali elastici, mentre il quarto considera il comportamento di un gas perfetto. Il quinto paragrafo tratta l'equazione delle onde in una molla, il sesto applica l'equazione al caso della molla del gadget, il settimo utilizza i risultati del sesto per le onde in un mezzo elastico, l'ottavo per le onde in un gas. I limiti di spazio rendono necessariamente concisa la trattazione, in particolare nel quinto paragrafo in cui il passaggio dalla configurazione discreta a quella continua richiederebbe un discorso più rigoroso.

2. LA LEGGE DI HOOKE E LE MOLLE IN SERIE

È ben noto che la legge di Hooke applicata ad una molla esprime la forza di richiamo elastica in funzione dell'allungamento: $\vec{F} = k\Delta x$, dove \vec{F} è la forza che un corpo applica ad una molla per spostare un estremo (in questo caso quello destro) di un tratto Δx . Per la terza legge della dinamica, la molla esercita una forza di richiamo opposta $-\vec{F}$. Se il centro di massa della molla rimane fermo, per la prima legge della dinamica all'estremo opposto deve essere applicata la forza $-\vec{F}$. Quanto scritto è illustrato nella figura che segue.



Il corpo che vincola la molla dal lato opposto (sinistro nella figura) potrebbe essere un vincolo oppure un qualsiasi corpo che tira la molla con forza $-\vec{F}$. La somma delle forze sulla molla è zero ed il suo centro di massa rimane fermo (supponendo - ovviamente - che la molla sia inizialmente ferma).



Se si collegano due molle in serie, la situazione è quella della figura qui sopra: la forza applicata

ad un estremo si trasmette da una molla alla successiva. La molla A si allunga di $\Delta x_A = F/k_A$, la molla B si allunga di $\Delta x_B = F/k_B$. Le due molle equivalgono ad un'unica molla il cui allungamento è $\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B = (1/k_A + 1/k_B)F$.

Si noti come, nel caso di molle collegate in serie, l'uso del reciproco della costante elastica sia più agevole dell'uso della costante stessa, poiché i reciproci si sommano. Indichiamo nel seguito con $m = 1/k$ il reciproco della costante elastica. La legge di Hooke si esprime in questo caso come $\Delta x = mF$. Una "molla lunga" come quella del gadget può essere rappresentata come una struttura distribuita, la cui costante elastica è proporzionale alla lunghezza a riposo della molla stessa, oppure -equivalentemente- al numero di spire che si lasciano libere di estendersi/comprimersi se ne vincoliamo alcune (ad esempio bloccandole con un nastro adesivo). Possiamo definire una "costante per unità di lunghezza" q tale che $m = ql_0$.

Quanto scritto finora può essere sperimentato con la molla-gadget appendendola ad un estremo verticale (poiché è difficile tenerla estesa orizzontalmente senza sostegni intermedi). Per effetto del suo peso, la molla verticale non ha una spaziatura omogenea delle spire. Se il peso stesso non porta le zone più alte della molla già al di fuori del comportamento lineare, teoricamente la disomogeneità non inficia la legge di Hooke valida per gli incrementi. Si può misurare l'allungamento della molla aggiungendo all'estremo inferiore diversi pesetti, come ad esempio una siringa di plastica da 2,5 cm³ riempita di acqua, che si incastra facilmente fra le ultime spire e che viene svuotata di volta in volta, ad esempio di 0,5 cm³. In ciascuna configurazione si misura la variazione di lunghezza. Ricordiamo che 1 cm³ di acqua ha un peso di 0,0098 N. Si può così stimare la costante elastica; successivamente si può ripetere la misura "bloccando" metà molla (ad esempio stringendo con nastro adesivo le prime 20 spire), per verificare se il reciproco della costante elastica si dimezza.

3. LA DEFORMAZIONE DI UN MATERIALE ELASTICO

Una sbarretta di materiale elastico, avente lunghezza iniziale l_0 e sezione di area S , in presenza di forze di trazione non troppo elevate, si comporta come una molla con la legge $\sigma/\epsilon = E$, in cui σ è lo sforzo, definito come rapporto fra la forza di trazione e l'area della superficie; ϵ è la deformazione o allungamento relativo $\Delta x/l_0$; E è il modulo di Young, caratteristico di ogni materiale (l'alluminio ha $E = 7 \times 10^{10}$ N/m², il ferro ha $E = 2 \times 10^{11}$ N/m²). Quindi $\frac{F/S}{\Delta x/l_0} = E$ da cui $\Delta x = \frac{Fl_0}{SE}$ e pertanto, secondo come abbiamo definito q , si ha $q = \frac{1}{SE}$.

4. LA COMPRESSIONE ADIABATICA DI UN GAS PERFETTO

Consideriamo un cilindretto di lunghezza l_0 , sezione di area S , contenente gas perfetto alla pressione P_0 e temperatura T_0 . Ad un estremo del cilindretto vi è un pistone che supponiamo di muovere per effettuare una compressione adiabatica del gas. La compressione avviene con legge $PV^\gamma = \text{costante}$ (γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica).

Se il pistone decomprime il gas scorrendo di una lunghezza Δx , il volume, inizialmente uguale a $V_0 = Sl_0$, subisce la variazione $\Delta V = S\Delta x$.

Da $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$ si ricava $P = f(V) = P_0(V_0/V)^\gamma = (P_0V_0)V^{-\gamma}$.

Per piccole compressioni del gas, si può linearizzare la funzione $f(V)$, ottenendo la variazione di pressione rispetto a P_0 come: $\Delta P = f'(V_0)\Delta V$, dove $f'(V_0)$ è la derivata prima della funzione $f(V)$ calcolata in $V_0 = Sl_0$. Ma $f'(V) = -\gamma P_0V_0^\gamma V^{-(\gamma+1)}$, quindi $f'(V_0) = -\gamma P_0V_0^\gamma V_0^{-(\gamma+1)}$, cioè $f'(V_0) = -\gamma P_0/V_0$.

Da ciò, essendo -a seguito della linearizzazione- $\Delta P = f'(V_0)\Delta V$, si ottiene $\Delta P = -\gamma P_0\Delta V/V_0$.

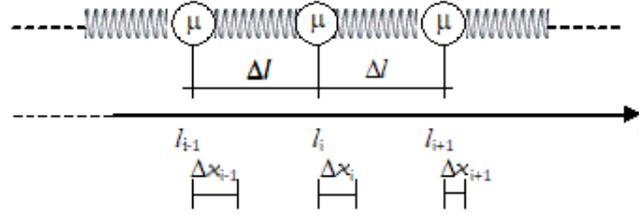
Considerando che $V_0 = Sl_0$, che $\Delta V = S\Delta x$ e che, ammesso che il cilindro sia in equilibrio alla pressione (atmosferica) P_0 , alla variazione ΔP corrisponde una forza $F = S\Delta P$ che comprime il pistone (da cui $\Delta P = F/S$), si ottiene $F/S = -\gamma P_0S\Delta x/(Sl_0)$.

Quindi $F = -\gamma P_0 S \Delta x / l_0$, che corrisponde alla legge di Hooke con $k = \gamma \frac{P_0 S}{l_0}$, $m = \frac{l_0}{\gamma P_0 S}$ e $q = \frac{1}{\gamma P_0 S}$. Il segno “-” è conseguenza di un aumento della pressione al diminuire del volume.

5. ONDE LONGITUDINALI IN UNA MOLLA

Se prendiamo in esame una molla “lunga”, questa ha una costante elastica ed una massa “distribuita”, approssimabile come una sequenza di sistemi massa-molla, ciascuno di lunghezza Δl , che si trova alla coordinata l_i rispetto a un’origine che, ad esempio, potrebbe coincidere con l’estremo sinistro della molla. Il modello presenta molle “ideali”, cioè prive di massa, collegate ad una massa μ che rappresenta la massa effettiva del segmento considerato. Se λ è la massa lineica, cioè la massa per unità di lunghezza, ovviamente $\mu = \lambda \Delta l$.

La situazione è rappresentata nella figura seguente.



In assenza di perturbazioni, le masse si trovano nella posizione di riposo l_i rispetto all’origine. In presenza di una perturbazione, la massa “i-esima” (il cui pedice è individuato dalla posizione) è spostata verso destra di Δx_i .

Rispetto alla posizione l_i , la molla di sinistra è compressa di $\Delta x_{i-1} - \Delta x_i$ ed esercita una forza sulla massa in posizione l_i , verso destra, pari a $F_{sx} = \frac{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i}{q \Delta l}$; la molla di destra è compressa di

$\Delta x_i - \Delta x_{i+1}$ ed esercita sulla massa in posizione l_i una forza verso sinistra, pari a $F_{dx} = \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i+1}}{q \Delta l}$.

La massa in posizione l_i è quindi soggetta a un’accelerazione $a = \frac{F_{sx} - F_{dx}}{\mu}$. Ciò ipotizzando che, in generale, lo spostamento Δx diventerà una funzione sia del tempo che della posizione l_i , attualmente discreta, ma che tenderà ad essere continua e quindi funzione delle due variabili l e t . In definitiva:

$$a = \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial t^2}.$$

Per piccoli valori di Δl , si ha: $\Delta x_i - \Delta x_{i-1} \cong \frac{\partial \Delta x}{\partial l} \Delta l$ calcolata in l_{i-1} ;

analogamente $\Delta x_i - \Delta x_{i+1} \cong \frac{\partial \Delta x}{\partial l} \Delta l$ calcolata in l_i .

Pertanto $F_{sx} \cong -\frac{1}{q} \frac{\partial \Delta x}{\partial l}$ calcolata in l_{i-1} e $F_{dx} \cong -\frac{1}{q} \frac{\partial \Delta x}{\partial l}$ calcolata in l_i .

Quindi $F_{sx} - F_{dx} \cong \frac{1}{q} \left[-\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial l} \right)_{l_{i-1}} + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial l} \right)_{l_i} \right]$, linearizzabile come: $F_{sx} - F_{dx} \cong \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2} \Delta l$.

Da qui si ricava: $a = \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2} \Delta l \frac{1}{\mu} = \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2} \Delta l \frac{1}{\lambda \Delta l} = \frac{1}{\lambda q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2}$, cioè $\frac{\partial^2 \Delta x}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2}$ che rappresenta l’equazione differenziale delle onde in una dimensione.

Soluzioni di tale equazione sono funzioni $f\left(t \pm \frac{l}{v}\right)$ cioè la funzione del tempo in una posizione fissata l_1 è in anticipo o in ritardo rispetto a quella in una posizione l_0 , di un ritardo o anticipo pari a $(l_1 - l_0)/v$.

Della funzione $f\left(t \pm \frac{l}{v}\right)$ la derivata seconda parziale rispetto al tempo vale: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''\left(t \pm \frac{l}{v}\right)$, mentre

la derivata seconda rispetto alla posizione vale: $\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = \frac{1}{v^2} f''\left(t \pm \frac{l}{v}\right)$, quindi $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial l^2}$.

Quest'ultima, confrontata con l'equazione delle onde $\frac{\partial^2 \Delta x}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda q} \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial l^2}$, fornisce $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda q}}$ che è la velocità di propagazione delle onde elastiche nella molla.

6. ONDE NELLA MOLLA DEL GADGET

Con un esemplare della molla è stata misurata una massa $M = 0,044$ kg. Allungando orizzontalmente la molla (sostenuta da un sottile filo ogni 10 spire) alla lunghezza di riposo di 1,5 m, si è ottenuto $\lambda = 0,029$ kg/m. Usando la procedura descritta in fondo al Paragrafo 2, è stato misurato un valore di $m = (5,1 \text{ cm})/(9,8 \text{ mN}) = 5,2 \text{ m/N}$, quindi con riferimento ad una lunghezza di riposo di 1,5 m si ha $q = 3,5 \text{ N}^{-1}$.

La velocità di propagazione delle onde dovrebbe valere $v = (1/\sqrt{0,029 \times 3,5}) \text{ m/s} = 3,1 \text{ m/s}$; "pizzicando" un estremo della molla, l'onda si dovrebbe propagare fino all'estremo opposto in circa 0,5 s. Il risultato è in linea, almeno come ordine di grandezza, con le prove sperimentali.

7. ONDE LONGITUDINALI IN UN MATERIALE ELASTICO

Un cilindretto di materiale elastico di sezione di area S e densità d , ha (Paragrafo 3) $q = \frac{1}{ES}$ e $\lambda = Sd$,

quindi la velocità di propagazione delle onde longitudinali vale $v = \frac{1}{\lambda q} = \sqrt{\frac{E}{d}}$.

Per l'alluminio $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $d = 2700 \text{ kg/m}^3$, quindi $v = 5091 \text{ m/s}$.

Per il ferro $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $d = 7960 \text{ kg/m}^3$, quindi $v = 5012 \text{ m/s}$.

8. ONDE SONORE IN UN CILINDRO RIEMPITO DI GAS PERFETTO

Dal Paragrafo 4 abbiamo $q = \frac{1}{\gamma S P_0}$, mentre $\lambda = Sd$ (dove d è la massa volumica del gas), quindi

$$q\lambda = \frac{d}{\gamma P_0}.$$

Considerando l'equazione di stato dei gas perfetti: $PV = nRT$, dove V , n , R e T sono -rispettivamente- il volume, la quantità di sostanza (moli), la costante universale $R = 8,31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ e la temperatura. Con riferimento al "peso molecolare" p e alla massa M , si ha $n = M/p$, quindi $PV = MRT/p$ cioè

$$P = dRT/p \text{ e allora: } q\lambda = \frac{d}{\gamma P} = \frac{p}{\gamma RT} \text{ da cui } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{p}}.$$

Per l'aria (miscela di gas approssimabili a perfetti) a 20 °C (293 K): $\gamma = 1,4$, $p = 0,02896 \text{ kg/mol}$, si ottiene $v = 343 \text{ m/s}$.

■ Un articolo interessante è il seguente: C. Guillon. "Un'esperienza interessante sull'energia meccanica in 1^a C¹ ovvero le straordinarie virtù di una *molla giocattolo*", *LFNS*, **35** (4/2002), 186.