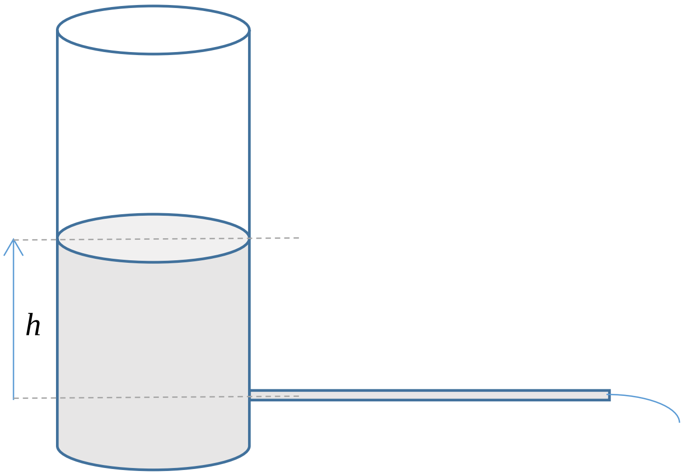
Associazione per l'Insegnamento della Fisica
Sezione di Padova

Attività per un laboratorio casalingo

L'ESPONENZIALE – UN MODELLO MATEMATICO VERSATILE

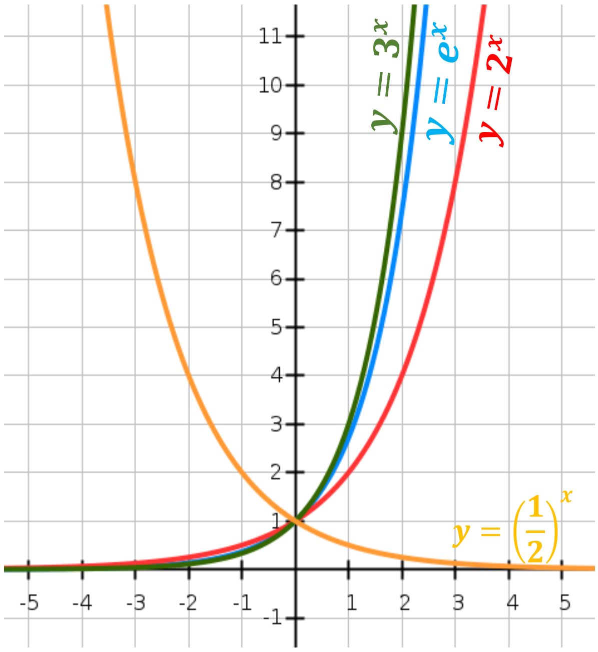


A cura di Luisa Bragalenti, Barbara Montolli (AIF – Sezione di Padova)

L’esponenziale – Un modello matematico versatile

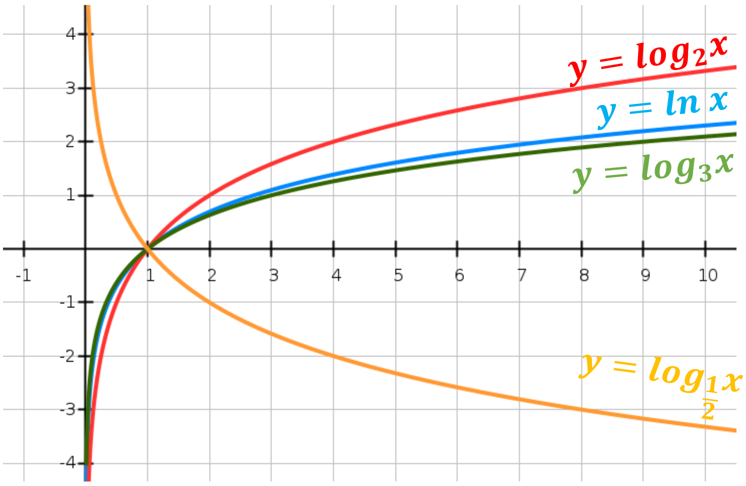
Richiami di matematica ed esempi di applicazione di esponenziali e logaritmi

Esponenziale



I testi di matematica per la Scuola Secondaria di Secondo Grado presentano definizione e proprietà della funzione esponenziale: y = a^x, con a>0 e a≠1, e in particolare di e^x, dove e è il numero di Eulero (o numero di Nepero), base dei logaritmi naturali.
L’esponenziale può essere un modello matematico per tutti quei fenomeni (non solo della fisica), in cui si verifica che il tasso di variazione di una variabile è proporzionale al valore corrispondente della variabile stessa.
Ecco qualche esempio: nel caso dell’interesse composto, al crescere del capitale cresce proporzionalmente il suo aumento annuale; per la radioattività il numero di decadimenti nell’unità di tempo scelta (frazioni di secondo, anni o secoli) è in proporzione al numero di nuclei presenti; il numero dei contagiati dal Covid 19, se non controllato, determina l’incremento giornaliero. Analogamente, il numero di messaggi in una catena di Sant’Antonio (a titolo esemplificativo: “se non inoltri questo messaggio a 3 persone rischi di apprezzare la matematica”) tende a crescere in modo esponenziale.
Un modello matematico è utilissimo per fare previsioni sui valori delle grandezze in gioco.

Logaritmo



Anche per questa funzione ti consigliamo di guardare definizione e proprietà su un testo di matematica. Per questa attività basta sapere che il logaritmo è la funzione inversa dell’esponenziale, quindi il logaritmo di y in base a, con a>0 e a≠1, è l’esponente x da assegnare ad a, perché risulti y=a^x.
Ad esempio il logaritmo di 100 in base 10, vale 2: $\log_{10}$ (100)=2 poiché 100=10^2; per la stessa ragione $\log_{10}$(0,1)= -1 poiché 10^{-1}=0,1
Nelle calcolatrici il simbolo *log* indica il logaritmo in base 10, il simbolo *ln* indica il logaritmo in base *e*.
I logaritmi sono usati per la misura di alcune grandezze, ad esempio sono logaritmiche la scala che misura il pH di una soluzione, quella che esprime in decibel l’intensità sonora e anche la scala Richter per descrivere la potenza dei terremoti.

Scopo e contenuti dell’esercitazione:
Ti si chiede di mettere a punto un modello matematico per descrivere un fenomeno molto semplice: una bottiglia piena d’acqua opportunamente forata che perde il suo contenuto attraverso un tubicino infilato nel foro.

In una bottiglia di plastica trasparente *(v. figura 1a)* è praticato un foro vicino alla base. Se la bottiglia è riempita d'acqua ed è aperta, l'acqua a poco a poco esce, e contemporaneamente la sua superficie libera si abbassa fino ad arrivare all'altezza del foro. Si può osservare subito che il livello scende sempre più lentamente e in ogni secondo non solo diminuisce il livello, ma anche rallenta la sua diminuzione. Ciò è dovuto al fatto che a spingere fuori l'acqua con maggiore o minore velocità è la differenza di pressione tra interno ed esterno della bottiglia, e questa differenza non è altro che la pressione idrostatica dell'acqua sovrastante il foro. Nella statica dei fluidi, per la legge di Stevino tale differenza di pressione è proporzionale al dislivello: $\Delta p = p - p_0 = \rho g h$ dove ρ indica la densità dell'acqua, g è l'accelerazione di gravità, h è il dislivello tra superficie libera e foro.

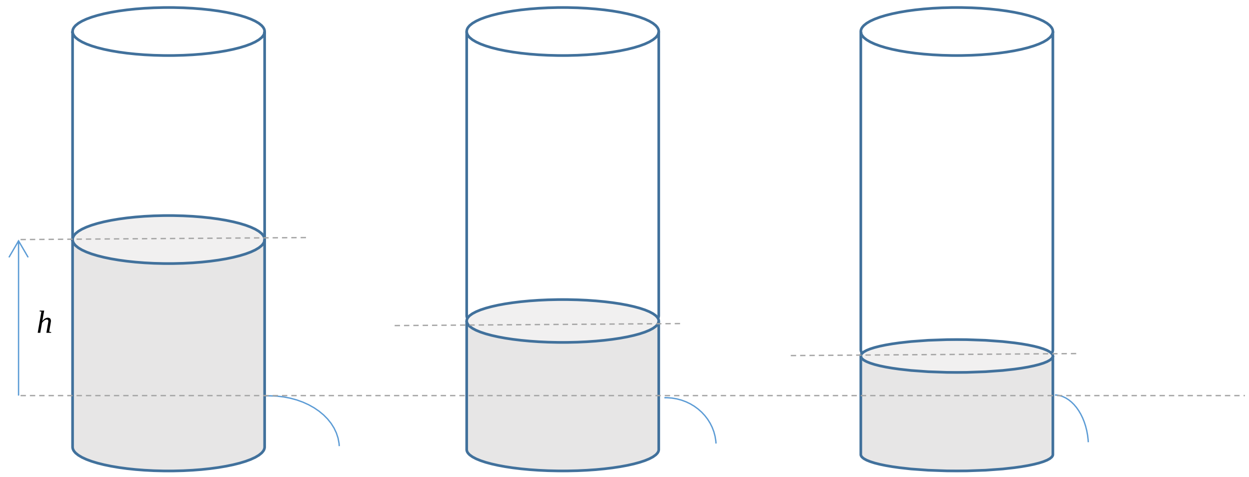


Figura 1 a

Se si potesse applicare la legge di Bernoulli che ipotizza la conservazione dell'energia meccanica per il flusso dell'acqua in uscita dal foro, sarebbe valida la relazione: $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h$ dove ρ indica la densità dell'acqua, g è l'accelerazione di gravità, h è il dislivello tra superficie libera e foro e v la velocità di uscita.

Ma in questo caso, nel foro è infilata una cannuccia (*v. figura 1 b*). Le pareti della cannuccia esercitano una resistenza al movimento dell'acqua, resistenza che, sommata a quella dovuta alla viscosità dell'acqua stessa, fa sì che la portata sia proporzionale alla differenza di pressione tra "monte" e valle" del flusso di corrente. Questa proporzionalità vale con approssimazione tanto migliore quanto minore è la sezione del "condotto".[1]
La differenza Δp tra la pressione a monte e quella a valle del flusso nella cannuccia è la pressione della colonna d'acqua sopra l'imboccatura della cannuccia stessa. Per la legge di Stevino $\Delta p = \rho g h$.

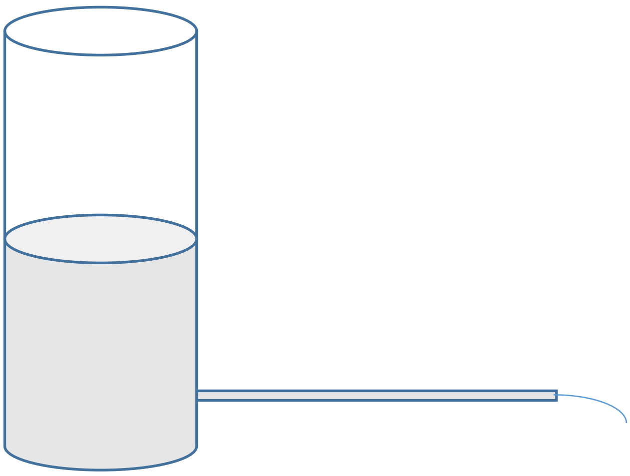


Figura 1 b

Schematizziamo la "propagazione" della proporzionalità diretta:
diminuzione di *h* al secondo *proporzionale alla* portata nel tubicino *proporzionale alla* differenza di pressione tra monte e valle *proporzionale al* dislivello *h* dell'acqua.

L'andamento di *h* in funzione del tempo *t* può essere rappresentato dalla funzione $h(t)=\alpha \cdot e^{\beta t}$

[1] La legge di Poiseuille, che è valida per flussi di liquidi in tubi capillari con velocità non troppo grandi, mette in relazione la portata con la differenza di pressione, il diametro e la lunghezza del condotto, la viscosità del liquido.

Attraverso misurazioni delle altezze h e dei tempi t corrispondenti, potrai trovare i valori di α e di β che si adattano meglio alla bottiglia e alla cannuccia scelta.

Materiali

- Bottiglia di plastica da 0,5 l, o 0,6 l, il più possibile “cilindrica”, cioè con parete laterale liscia almeno nella zona centrale per una decina di centimetri
- Cannuccia di plastica da 5 mm di diametro, o meno
- Ago grosso per cucire (ago da lana o da materassi), o punta di trapano da 5 oppure 6 mm, per forare la bottiglia
- Pinze
- Ferro da calza di diametro 3,5 mm o meno (andrà infilato nella cannuccia per diminuire la sezione del condotto)
- Pasta adesiva, tipo Patafix
- Forbici
- Stuzzicadenti
- Nastro adesivo trasparente
- Striscia di carta o metro di carta
- Righello (sensibilità 1 mm, portata almeno 15 cm)
- Pennarello indelebile (non necessario)
- Cronometro, possibilmente capace di memorizzare fino a 10 tempi.
- Imbuto
- Acqua
- Lavello della cucina, oppure sostegno per la bottiglia e recipiente per l’acqua che esce
- Sostegni
- Calcolatrice scientifica o foglio elettronico. Quest’ultimo non è necessario.

Operazioni preliminari

Scalda sulla fiamma del gas la punta da trapano o la punta dell’ago da lana, tenendolo con la pinza e pratica un foro nella parete della bottiglia vicino alla base della zona cilindrica. Se usi l’ago, il foro va allargato in più riprese. Evita di respirare sopra la plastica scaldata. Il diametro del foro deve essere appena superiore al diametro esterno della cannuccia.

Ritaglia da un foglio una strisciolina di carta larga circa 2 cm e alta 15 cm. Segna in modo ben visibile sulla strisciolina di carta da 10 a 15 tratti a distanza di 10 mm l’uno dall’altro. Con il nastro adesivo, incolla la strisciolina sulla bottiglia, parallelamente all’asse longitudinale, in modo che il tratto più basso sia all’altezza del centro del foro. In alternativa, fissa alla bottiglia un pezzo di “metro di carta” di quelli disponibili nei negozi di mobili o bricolage.

Taglia via dalla cannuccia il tratto con lo snodo, e misura la sua lunghezza. Infila la cannuccia nel foro per 2 o 3 cm. Premi bene con lo stuzzicadenti un rotolino di pasta adesiva tutto intorno al foro, per sigillare al massimo lo spazio tra cannuccia e bordo del foro. Non dovrebbe uscire acqua da questa connessione. Se uscirà qualche goccia non comprometterà comunque la misurazione.

Infila il ferro da calza nella cannuccia, facendolo sporgere appena all'interno della bottiglia. Fai attenzione che il peso del ferro non stacchi la cannuccia dal foro. La cannuccia deve essere orizzontale. Sostienila opportunamente, come mostra la foto, con quello di cui disponi.
Il ferro serve a diminuire la sezione del condotto, così che la portata sia, con buona approssimazione, proporzionale alla differenza di pressione tra monte e valle.

Prima di riempire la bottiglia, metti a portata di mano tutto quello che ti serve per misurare i tempi e per registrarli in una tabella. Per determinare l'andamento di h in funzione del tempo t, mentre la bottiglia si svuota, dovrai misurare i tempi t in corrispondenza dei vari dislivelli h.

Procedimento

Riempi la bottiglia. Se la chiudi con il suo tappo, l'acqua cessa di uscire. Ma puoi anche lasciarla senza tappo, dato che il livello dell'acqua si abbassa piuttosto lentamente.
Dovrai ora leggere il cronometro nell'istante in cui la superficie libera dell'acqua è all'altezza delle varie tacche segnate sul nastro di carta.
Azzera il cronometro e, quando il livello è arrivato alla tacca più alta che hai scelto come iniziale, fallo partire. Se disponi di un cronometro che memorizza fino ad una decina di tempi, non hai problemi nella rilevazione dei valori corrispondenti alle tacche inferiori. Se non ne disponi e lavori da solo, puoi limitarti a letture "al volo" sul cronometro fino alla cifra dei secondi o dei decimi, e hai tutto il tempo per registrare il dato, mentre l'acqua scende fino alla tacca successiva.

Valori di α e di β

Ricordando che una potenza con esponente nullo vale 1, determina il valore di α.

Per trovare il valore di β, puoi procedere con il foglio elettronico o con calcolatrice adeguata attraverso il grafico di h in funzione di t.
Il foglio elettronico è utile, ma non necessario, sono sufficienti una calcolatrice scientifica e carta quadrettata o millimetrata.
Dalla $h(t)=\alpha \cdot e^{\beta t}$, si ricava $\frac{h(t)}{\alpha} = e^{\beta t}$ e quindi, dalla definizione di logaritmo,
risulta $ln\left(\frac{h(t)}{\alpha}\right) = \beta \cdot t$
Se riporti in un piano cartesiano i punti con il tempo t in ascissa, e con ordinata pari a $ln\left(\frac{h(t)}{\alpha}\right)$, il modello prevede che i punti risultino allineati e la retta sia del tipo $y=mx$ cioè passante per l'origine, dato che $ln\left(\frac{h(t)}{\alpha}\right) = \beta \cdot t$ esprime una proporzionalità diretta. Traccia un segmento, passante per l'origine, che sia più vicino possibile a tutti i punti sperimentali. Questo segmento appartiene ad una retta il cui coefficiente angolare vale β. Determina il valore di β dal grafico.