Ti trovi di fronte a due altoparlanti uguali A1 e A2, distanti 2 metri uno dall’altro, che emettono un suono monocromatico; osservi che quando sei equidistante da entrambi gli altoparlanti l’intensità sonora che percepisci ha un minimo e che quando, partendo dalla posizione di uno dei due altoparlanti (ad esempio A1) ti muovi lungo la retta perpendicolare alla congiungente i due altoparlanti, l’intensità sonora che percepisci è massima quando sei a distanza di 2 metri da A1. Determina la lunghezza d’onda del suono emesso dagli altoparlanti.

SVOLGIMENTO

Supponiamo che altoparlanti “uguali” significhi anche: “che emettono con la medesima intensità”. Il fatto che in posizione equidistante dai due altoparlanti l’intensità sonora sia minima implica che le due sorgenti oscillino in opposizione di fase. Di conseguenza, si avrà un massimo di intensità quando la differenza dei due cammini, dalle sorgenti verso il punto di ascolto, sarà pari a un numero dispari di mezze lunghezze d’onda[1].

Questa considerazione, unita alla geometria del problema e alla condizione di avere un massimo in un punto distante $2\ \mathrm{m}$ dalla sorgente, porta a scrivere:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2n+1}\ \mathrm{m}, \qquad n\in\mathbb{N}. \qquad [1]$$

La [1], però, fornisce un elevato numero di soluzioni, grosso modo corrispondenti a $0\le n<48$ (per $\mathrm{n}=48$, assumendo una velocità del suono di $343\ \mathrm{m/s}$, si ottiene una frequenza $\nu\cong 20\ \mathrm{kHz}$, limite della banda acustica).

Perché il problema presenti un’unica soluzione bisogna interpretare la dizione: “l’intensità sonora che percepisci è massima” come: “l’intensità sonora che percepisci raggiunge per la prima volta un massimo”.
In questo caso, infatti, l’unico valore accettabile diventa quello che si ottiene con $n=0$, che corrisponde alla lunghezza d’onda:

$$\lambda=4\left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{m}=\ 1{,}7\ \mathrm{m}.^{2} \qquad [2]$$

Supponiamo, infatti, che un punto di massimo possa essere raggiunto muovendo dal punto A1 lungo la retta indicata, prima di arrivare alla distanza di $2\ \mathrm{m}$ da A1.
Durante lo spostamento, mentre la distanza da A1 cresce fra 0 e $2\ \mathrm{m}$, la differenza di cammino $\Delta\mathrm{s}$ passa con continuità dal valore iniziale $\Delta\mathrm{s}_0=2\ \mathrm{m}$ al valore finale minimo $\Delta\mathrm{s}_1=2\left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{m}=0{,}83\ \mathrm{m}$.

Sia n uno dei valori a priori accettabili per ottenere λ dalla [1]. Perché, con la lunghezza d’onda λ, vi sia un massimo di intensità anche prima che la distanza da A1 divenga di $2\ \mathrm{m}$, è necessario che in quel punto Δs sia pari a un numero dispari m di mezze lunghezze d’onda: $m=2n'+1$, con $n'>n$, e la differenza Δs sia compresa nell’intervallo $[\Delta s_0,\Delta s_1]$.

[1] In questo ragionamento e nel seguito si trascura la diversa attenuazione dei due segnali nel punto di sovrapposizione, dovuta alle differenti distanze dalle rispettive sorgenti. Su questo torneremo alla fine.

[2] La frequenza corrispondente è di circa $200\ \mathrm{Hz}$.

Vediamo che cosa accade con l'incremento più piccolo possibile: $n' = n + 1$, ovvero $m = 2n + 3$.
Dovremmo avere:

$$(2n+3)\frac{\lambda}{2} = (2n+3)\,\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2n+1}\ \mathrm{m} \le 2\ \mathrm{m}.$$

Se risolviamo la disequazione:

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)(2x+3)}{2x+1} \le 2,$$

ricaviamo:

$$x \ge \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cong 0{,}21.$$

Questo ci dice che, per $n > 0$ (ovvero, $n = 1, 2, 3, \cdots$), è sempre presente almeno un punto di intensità massima che dista meno di $2\ \mathrm{m}$ da A1.[3]
Viceversa, questo non avviene quando $n = 0$, come volevamo mostrare.

COMMENTI

– Il testo inizia con un'espressione che potremmo dire metaforica, parlando di suono "monocromatico". Sarebbe forse stato meglio parlare di suono sinusoidale puro.

– Per risolvere l'esercizio, si è costretti ad ignorare il fatto che, all'aumentare della distanza dalle sorgenti, il suono subisce un'attenuazione. È ragionevole pensare che l'andamento dell'intensità sonora lungo il percorso indicato che parte da A1 sia, in realtà, apprezzabilmente diverso da quello che si ricava ragionando soltanto nei termini dello sfasamento dovuto alla differenza di cammino; tenerne conto renderebbe il quesito molto complicato (ne riparliamo in appendice).
Questa circostanza determina un paradosso tipico di questo genere d'esercizi: lo studente accorto si può trovare in difficoltà, mentre lo studente più ingenuo neppure si avvede delle complicazioni esistenti.

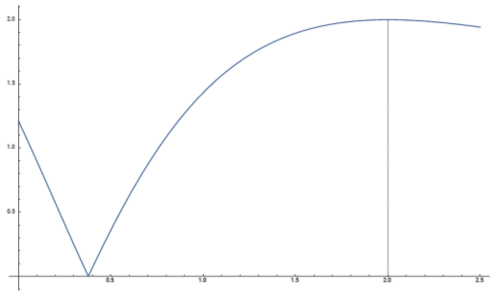
– Anche con l'ipotesi un po' arbitraria detta ora, l'esercizio non è banale, innanzitutto perché il testo non dice in modo chiaro che si incontra il primo massimo di intensità (e non semplicemente un massimo) nella posizione indicata. Non risulta, quindi, chiaro come determinare "la" lunghezza d'onda.

Pur leggendo tra le righe che si debba ragionare sul primo massimo, non è banale stabilire che si debba adottare la soluzione data per $n = 0$. In altri esercizi, apparentemente simili, ci si muove con continuità da una posizione centrale, dove la differenza di cammino è nulla, verso valori crescenti di tale differenza ed è chiaro che il primo nuovo massimo/minimo incontrato corrisponde al minimo valore di n. Non così in questo caso, dove la differenza di cammino decresce progressivamente, restando tra valori positivi.

– Un'ultima considerazione: le distanze sono date con una sola cifra (valori scritti, tra l'altro, non seguendo le regole: 2 metri). Abbiamo proceduto come se fossero assegnate due cifre ($2{,}0\ \mathrm{m}$), altrimenti tutti i ragionamenti fatti perderebbero di senso.

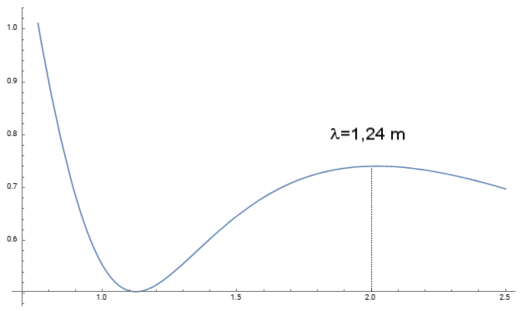
[3] La condizione $\Delta s \ge 2\left(\sqrt{2}-1\right)\ \mathrm{m}$ è comunque verificata, come è facile controllare.

Nella figura sottostante è rappresentato l'andamento dell'ampiezza della sinusoide corrispondente alla somma dei due suoni, quando – partendo da A1, ci si allontana da quella sorgente nel modo indicato dal testo. In ascisse è la distanza (in metri) da A1, in ordinate il rapporto tra l'ampiezza del suono risultante e quella delle sorgenti (supposte di eguale intensità). Si è ignorata l'attenuazione dei suoni componenti legata alla distanza dalla sorgente e si è posto $\lambda = 1{,}7\ \mathrm{m}$.



Come si vede, in corrispondenza di A1 non vi è un minimo, bensì un massimo locale. Alla distanza di $2\ \mathrm{m}$ da A1, poi, si ha il massimo corrispondente a $n = 0$. Questo rende la formulazione del quesito ulteriormente ambigua.

L'immagine seguente, invece, è stata determinata[4] supponendo che l'ampiezza A di ciascuno dei suoni da sovrapporre si attenui con le caratteristiche di un'onda sferica, cioè con $A \propto 1/R$ (dove R è la distanza dalla sorgente).



In questo caso si ottiene un massimo a $2\ \mathrm{m}$ da A1 per un valore di λ sensibilmente diverso da quello calcolato nella [2]!

Questo fatto rende assai discutibile tutto il quesito, perché l'ipotesi che siano trascurabili le attenuazioni appare fortemente arbitraria (e, comunque, non è indicata nel testo).

Espressione dell'ampiezza risultante:

$$A' = A x_0 \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{d^2 + x^2} - \frac{2}{x\sqrt{d^2 + x^2}} \cos\left(2\pi \frac{\sqrt{d^2 + x^2} - x}{\lambda}\right)}.$$

dove d, x, x_0 e λ sono in metri, $d = 2\ \mathrm{m}$ è la distanza tra A1 e A2, mentre x_0 è un'opportuna piccola distanza dalle sorgenti dove l'ampiezza di oscillazione vale A.

[4] Con Wolfram Cloud (https://develop.open.wolframcloud.com/app/), usando l'istruzione: Manipulate[Plot[Sqrt[x^(-2) + (4 + x^2)^(-1) - (2 Cos[(2 Pi (-x + Sqrt[4 + x^2]))/a])/(x Sqrt[4 + x^2])], {x, 0.7, 2.5}], {{a,1.24,"lambda"}, 1, 2, Appearance->"Labeled"}]