

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t) = \frac{1}{9}t^2 \left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

Scriviamo la legge oraria come:

$$x(t) = at^2(bt + c).$$

Avremo, quindi:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= at(3bt + 2c) \\ \ddot{x}(t) &= 2a(3bt + c).\end{aligned}$$

Come si vede, l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ non è costante e, quindi, il moto non è uniformemente vario.

Calcoliamo poi, per $t_1 = 9$ s:

$$v_m = \frac{x(t_1) - 0}{t_1 - 0} = \frac{9(3 + 2)}{9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Infine, dobbiamo determinare il valore di t per il quale sia $\dot{x}(t) = v_m$. Abbiamo, dunque, l'equazione:

$$3abt^2 + 2act - v_m = 0$$

che dà:

$$t = \frac{-ac + \sqrt{a^2c^2 + 3abv_m}}{3ab} = \frac{-2/9 + \sqrt{4/81 + 5/9}}{1/9} \text{ s} = 5 \text{ s}.$$

(Poiché $t \geq 0$, abbiamo considerato la sola radice positiva).