

In un solenoide cilindrico ideale nel vuoto, costituito da 400 spire e lungo 10,0 cm viene fatta passare una corrente alternata  $i(t)=0,50\text{sen}(63t)$  A. Sull'asse del solenoide è posta una spira circolare, coassiale con il solenoide, in modo che si possa considerare che tutto il campo magnetico uscente dal solenoide attraversi la sezione della spira. La spira ha un raggio di 5,0 cm e una resistenza ohmica di  $0,20\Omega$ . Determina il valore massimo della forza elettromotrice indotta nella spira e la corrente indotta che la percorre.

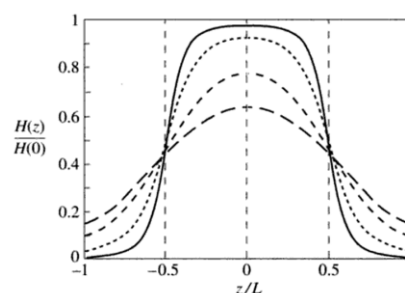
## RISOLUZIONE

La prima cosa da decidere per rispondere alle domande del testo è quale debba essere la collocazione della spira circolare posta «sull'asse del solenoide» e «coassiale con il solenoide, in modo che si possa considerare che tutto il campo uscente dal solenoide attraversi la sezione della spira». Per la quale spira è indicata la misura del raggio (5,0 cm), mentre analoga informazione non è data per il solenoide – perciò la spira potrebbe essere più larga del solenoide.

Quest'ultimo è definito «ideale nel vuoto» (come se supportolo nell'aria facesse una grande differenza). Nello stesso tempo, però, gli si attribuisce una lunghezza modesta, 10 cm, pari alla misura del diametro della spira. E ciò è problematico, come vedremo subito.

Un solenoide “ideale” è tale perché “infinitamente” lungo e con spire compatte, che sono assimilate ad anelli adiacenti nei quali circolano correnti uguali. In esso il campo magnetico esterno è nullo (le linee di campo non escono dal solenoide) e il campo interno è uniforme, diretto parallelamente all'asse del sistema. In un solenoide reale, invece, una parte delle linee di campo esce attraverso la superficie laterale e il resto attraverso un'estremità: per un solenoide di lunghezza grande rispetto al raggio, il flusso del campo magnetico attraverso un'estremità<sup>1</sup> è circa metà del flusso che attraversa una sezione centrale piana perpendicolare all'asse<sup>2</sup>. Anche l'intensità del campo generato, a parità di densità delle spire e intensità di corrente, non è uguale a quella del solenoide ideale, alla quale si approssima soltanto se il solenoide reale è abbastanza lungo in rapporto al suo raggio.

Nella figura qui sotto, per riferimento, è rappresentata l'intensità del campo magnetico lungo l'asse di un solenoide di lunghezza  $L$ : le varie curve si riferiscono a diversi rapporti tra raggio  $r$  e lunghezza  $L$ .<sup>3</sup>



Campo magnetico lungo l'asse di un solenoide in funzione della posizione  $z$  sull'asse, per vari rapporti raggio-lunghezza  $r/L$ : 0,1; 0,2; 0,4; 0,6 (dalla curva superiore a quella inferiore).  $H_0$  è l'intensità del campo del corrispondente solenoide

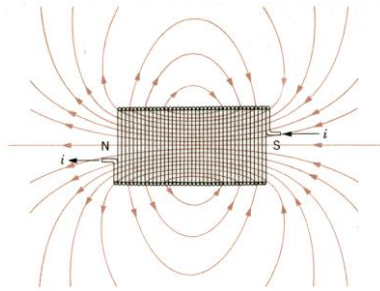
Nella figura seguente, invece, sono rappresentate schematicamente le linee di campo di un solenoide finito avvolto con spire strette (il nostro, supponendole disposte in un solo strato, ne ha 4 per ogni millimetro)<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Per flusso uscente dall'estremità intendiamo il flusso che attraversa una superficie che abbia per contorno il bordo circolare del solenoide alla sua estremità.

<sup>2</sup> Per un solenoide semi-infinito è esattamente il doppio del flusso interno che attraversa una sezione posta a distanza “infinita” dalla faccia.

<sup>3</sup> D. A. De Wolf. *Essentials of Electromagnetics for Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, p. 226

<sup>4</sup> La figura è tratta da: D. Halliday, R. Resnick. *Fundamentals of Physics*, J. Wiley & Sons, New York 1981, p. 565 (per ragioni di comodo, è stata ribaltata da destra a sinistra).



Detto tutto ciò, dove dovrebbe essere collocata la spira circolare, per poter intercettare praticamente «tutto il campo magnetico uscente dal solenoide»? E, comunque, come si può determinare il flusso attraverso la spira, se non si sa dove e come si estende il campo del solenoide (perché non è noto quale sia il diametro dell'avvolgimento)?

Quest'ultimo dubbio può essere sciolto, se si ipotizza che il diametro del solenoide debba essere pari a quello dell'anello: se vogliamo porre un anello attorno a un solenoide, non sarà forse come un anello da mettere al dito? Deve calzare perfettamente...

Con la nostra ipotesi supplementare (ma perché non darla esplicitamente nel testo?), abbiamo sostanzialmente due posizioni possibili: anello in corrispondenza di un estremo del solenoide oppure al centro.



Nel primo caso, le linee del campo che escono dai bordi laterali dell'avvolgimento non attraversano la spira; come spiegato all'inizio, con questa scelta si perderebbe circa metà del flusso presente al centro.

Nel secondo caso tutte le linee sono all'interno del solenoide ed è difficile parlare di "campo uscente"... Però lì al centro passano tutte le linee del campo e queste, prima o poi, usciranno dal solenoide. Sembra l'unica scelta sensata: ma chissà a che cosa, in realtà, pensava chi ha scritto il quesito?

A questo punto dovremmo essere in grado di fare i conti e trovare i risultati richiesti. C'è, però, un nuovo problema: adesso il solenoide è un po' troppo corto! Già, perché ha il diametro di 10 cm (come la spira ad esso coassiale) ed è lungo altrettanto. Secondo qualcuno, quando la lunghezza è inferiore a dieci volte il raggio, nemmeno lo si dovrebbe chiamare "solenoido" ma, semplicemente, bobina<sup>5</sup>.

Al di là dei nomi, questo significa che il calcolo del valore del campo – anche nella regione centrale dove abbiamo collocato la spira – non può essere fatto con la semplice espressione valida per un solenoide ideale (e, approssimativamente, per un solenoide "lungo"). Il primo grafico che abbiamo riportato suggerisce un fattore correttivo di circa 0,7.<sup>6</sup> Ma, poiché la componente assiale del campo cresce un poco di intensità passando dall'asse verso la superficie laterale, adotteremo un valore di 0,76.<sup>7</sup>

L'intensità del campo di un solenoide ideale (avvolto uniformemente) è data da:

$$B = \mu_0 n i,$$

dove  $n$  è la "densità" delle spire (rapporto tra il numero  $N$  delle spire presenti in un qualunque tratto del solenoide e la lunghezza  $L$  del tratto su cui sono avvolte),  $i$  è l'intensità della corrente e  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto. Per tener conto della non idealità del nostro sistema, useremo, allora, l'espressione:

<sup>5</sup> Per esempio: <https://it.wikipedia.org/wiki/Solenoido>

<sup>6</sup> Il calcolo diretto del valore del campo al centro del nostro solenoide dà un fattore  $\sqrt{2}/2 \cong 0,71$ .

<sup>7</sup> Si veda: E. E. Callaghan, S. H. Maslen, *The Magnetic Field of a Finite Solenoid*, Nota tecnica NASA, Cleveland 1960 [https://archive.org/details/nasa\\_techdoc\\_19980227402/page/n10](https://archive.org/details/nasa_techdoc_19980227402/page/n10). Il fattore 0,76 è stato ricavato usando il grafico dei valori del campo nella sezione centrale del solenoide ( $z = 0$ ), al variare della distanza dall'asse; è stata calcolata un'opportuna media, dopo aver adattato una parabola dati del grafico nell'intervallo  $0 \leq r/a \leq 1$ . Si tratta, comunque, di una correzione approssimativa.

$$B = k\mu_0 n i,$$

con  $k = 0,76$ . Il flusso attraverso la spira sarà, dunque:

$$\Phi(\vec{B}) = k\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} i,$$

avendo posto  $a$  per il raggio del solenoide e della spira,  $N$  per il numero delle spire e  $L$  per la lunghezza del solenoide.

Secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la f.e.m. indotta può essere calcolata come:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -k\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} \frac{di}{dt}.$$

Poiché

$$\frac{di}{dt} = i_0 \frac{d}{dt} \sin(\omega t) = i_0 \omega \cos(\omega t),$$

avremo:

$$\mathcal{E} = -k\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} i_0 \omega \cos(\omega t),$$

dove abbiamo posto  $i_0 = 0,50$  A e  $\omega = 63 \text{ s}^{-1}$ ; supponiamo, naturalmente, che  $t$  indichi il tempo.

Il valore massimo della f.e.m. indotta si può allora calcolare come:

$$\mathcal{E}_{\max} = k\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} i_0 \omega = 0,76 \cdot 1,24 \text{ mV} = 0,95 \text{ mV}.$$

La corrente nella spira, trascurandone l'induttanza e indicando con  $R = 0,20 \Omega$  la resistenza, è allora:

$$i_s = \frac{\mathcal{E}}{R} = 4,7 \cos(\omega t) \text{ mA}.$$

#### COMMENTI

Questo quesito è formulato molto male, perché la frase «che tutto il campo magnetico uscente dal solenoide attraversi la sezione della spira» è difficile, se non impossibile, da decifrare. Oltre a ciò, si parla di un solenoide ideale, ma le dimensioni che si possono attribuire al sistema (attribuire, perché il diametro, a rigore, non è precisato) non permettono di ritenere adeguata l'approssimazione del solenoide ideale.

È da presupporre che agli studenti sia nota soltanto l'espressione per il calcolo del campo prodotto da un solenoide ideale. Perché, allora, creare inutili complicazioni?

Infine, non trascurabile, l'espressione della corrente scritta nel testo è formalmente scorretta. Infatti l'argomento della funzione seno (funzione da scriversi in carattere diritto, non in corsivo) deve essere adimensionato e tale non può essere il valore  $63 t$ , se  $t$  deve essere un tempo. Inoltre il simbolo dell'unità ampere deve essere scritto in tondo, non in corsivo.

Le regole di scrittura sono fissate da decenni ed è importante che siano conosciute e rispettate. Trovarsi cose scritte male in un testo "ufficiale" non fa molto bene alla didattica.

Si sarebbe potuto scrivere: «Un solenoide cilindrico molto lungo, avente il diametro di 10,0 cm, è avvolto con spire strette di densità  $4000 \text{ m}^{-1}$  (spire al metro). Attorno al solenoide e isolato elettricamente da quello, al centro dell'avvolgimento, è serrato un sottile anello conduttore, la cui resistenza è  $R = 0,20 \Omega$ . La corrente che circola nel solenoide in funzione del tempo  $t$  è:  $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ , con  $i_0 = 0,50$  A e  $\omega = 20 \pi \text{ s}^{-1}$ .».