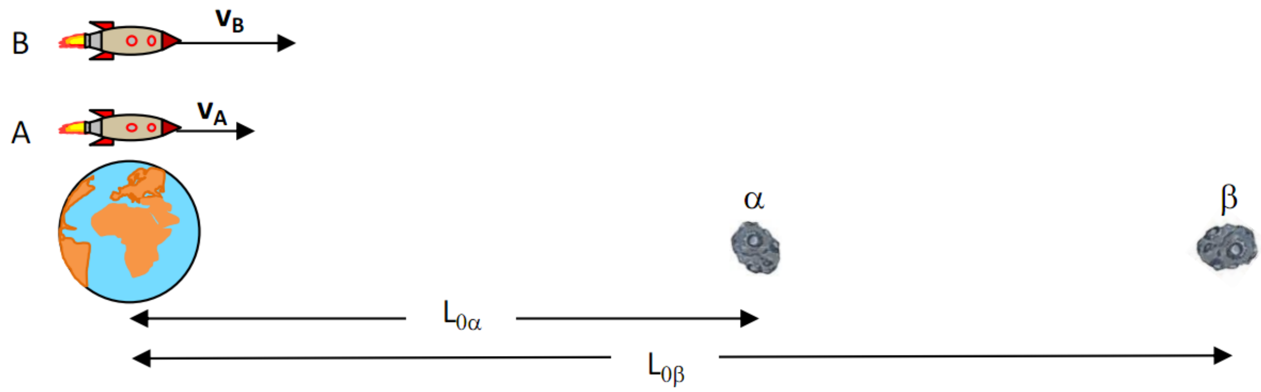
Due asteroidi, denominati α e β, sono stati individuati a distanze $L_{0\alpha}$ = 4 *ore luce* (pari a $4{,}317 \cdot 10^{12} m$) e $L_{0\beta}$ = 7,5 *ore luce* (pari a $8{,}094 \cdot 10^{12} m$) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la Terra e la loro velocità rispetto alla Terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β.

Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A. Nel sistema di riferimento della Terra, all'istante iniziale t = 0, la situazione è quella rappresentata nella figura seguente:



Le due figure seguenti illustrano invece la situazione all'istante t = 0 nei sistemi di riferimento dell'astronave A e dell'astronave B.

[Figure omesse]

1. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame e scrivendo in corrispondenza di ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due sistemi di riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

Il comandante della missione decide di premiare l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

2. Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide α il suo orologio di bordo indica un tempo $t'_\alpha = 9h$ 9min $54s$ (*pari a* $3{,}299 \cdot 10^4 s$) e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β, il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo[1] $t'_\beta = 9h$ 9min $54s$. Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità c) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide β, ritiene di aver vinto e di avere quindi diritto al premio.

3. Dalle trasformazioni di Lorentz o dalle relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, deduci il tempo t'_β di arrivo di B sull'asteroide β come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

[1] Nel risolvere il problema, indicheremo questo tempo con t''_β.

4. Ma anche l'astronauta B ritiene di aver vinto, in base alla sua misura del tempo t'_α impiegato da A. Utilizzando ancora una volta le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, verifica la giustezza delle conclusioni tratte da B.

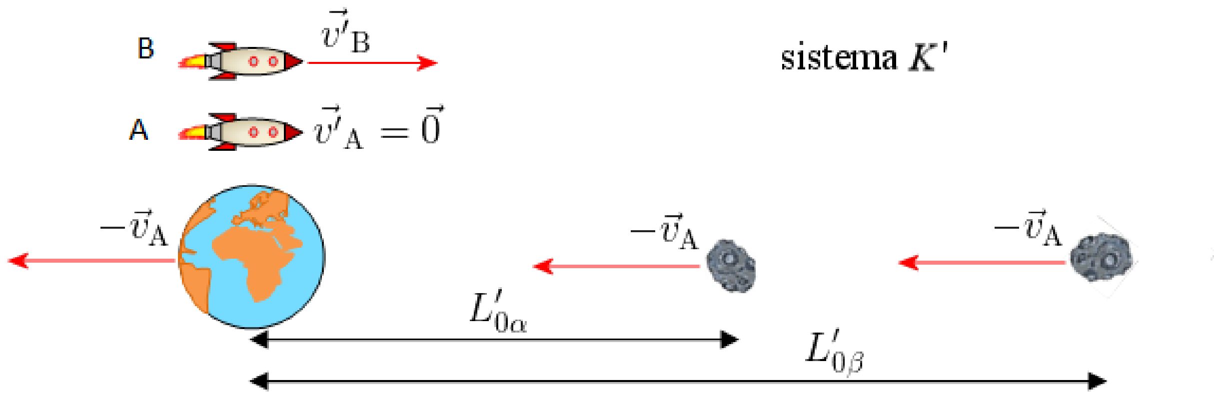
Il comandante della missione, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li premia entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.

5. Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la ragione del contenzioso tra i due astronauti.

SVOLGIMENTO

Useremo le seguenti notazioni:
K: sistema di riferimento solidale con la Terra; le variabili non accentate saranno riferite a questo sistema.
K': sistema di riferimento solidale con l'astronave A; le variabili accentate (') saranno riferite a questo sistema.
K'': sistema di riferimento solidale con l'astronave B; le variabili accentate ('') saranno riferite a questo sistema.

1. Le figure completate sono riportate qui sotto.



Nel sistema di riferimento K' le distanze tra la Terra e i due asteroidi risultano[2]:

$$L'_{0\alpha} = L_{0\alpha}\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{A}}{c}\right)^2} \qquad \text{e} \qquad L'_{0\beta} = L_{0\beta}\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{A}}{c}\right)^2}$$

e la velocità di B è:

$$v'_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}}{1 - \frac{v_\mathrm{A} v_\mathrm{B}}{c^2}} \tag{1}$$

come si ricava applicando la legge di composizione delle velocità (con c, come d'uso, abbiamo indicato la velocità della luce).

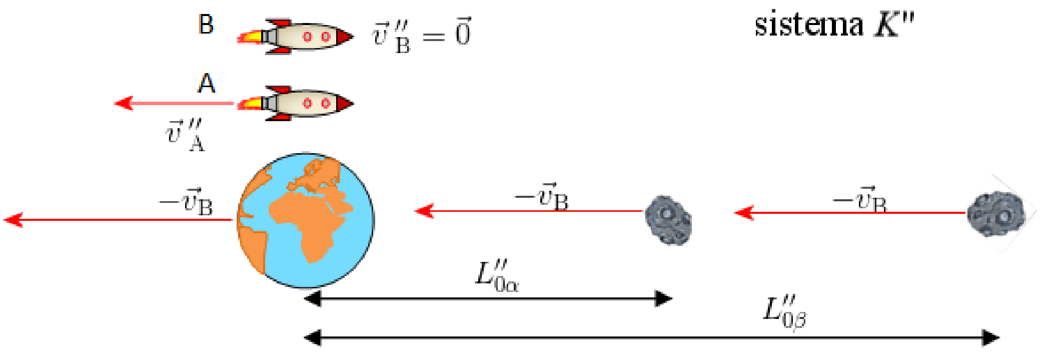
Nel sistema K'' si hanno relazioni analoghe:

$$L''_{0\alpha} = L_{0\alpha}\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)^2}, \qquad L''_{0\beta} = L_{0\beta}\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)^2}$$

e la velocità di A risulta:

[2] Abbiamo modificato le figure fornite dal testo, contraendo opportunamente le distanze Terra – asteroidi nei due sistemi K' e K'' rispetto a quanto rappresentato nella figura iniziale riferita a K.

$$v''_A = \frac{v_A - v_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} \tag{2}$$



2. Per determinare il valore delle velocità v_A e v_B, è opportuno calcolare i tempi di viaggio t_α e t_β nel riferimento terrestre K. Calcoleremo poi: $v_A = L_{0\alpha}/t_\alpha$ e, analogamente, $v_B = L_{0\beta}/t_\beta$.

Eseguiamo i passaggi di calcolo per t_α. Dall'invarianza dell'intervallo spazio-temporale ricaviamo:

$$t'^2_\alpha = t^2_\alpha - \frac{L^2_{0\alpha}}{c^2}$$

$$t_\alpha = \sqrt{t'^2_\alpha + \frac{L^2_{0\alpha}}{c^2}}. \tag{3}$$

Perciò:

$$\frac{v_A}{c} = \frac{L_{0\alpha}}{ct_\alpha} = \frac{L_{0\alpha}}{c\sqrt{t'^2_\alpha + \frac{L^2_{0\alpha}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ct'_\alpha}{L_{0\alpha}}\right)^2 + 1}}. \tag{4}$$

Analogamente sarà:

$$t_\beta = \sqrt{t''^2_\beta + \frac{L^2_{0\beta}}{c^2}}, \qquad \frac{v_B}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ct''_\beta}{L_{0\beta}}\right)^2 + 1}}. \tag{5}$$

Possiamo ora determinare i due valori richiesti[3]:

$$\frac{v_A}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{299792458 \cdot 3{,}299 \times 10^4}{4{,}317 \times 10^{12}}\right)^2 + 1}} = 0{,}400.$$

$$\frac{v_B}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{299792458 \cdot 3{,}299 \times 10^4}{8{,}094 \times 10^{12}}\right)^2 + 1}} = 0{,}633.$$

[3] Il calcolo può essere effettuato anche utilizzando direttamente i valori di distanza espressi in ore-luce. In questo caso li si può convertire dapprima in secondi-luce (moltiplicandone il valore per 3600) e si otterrà poi la conversione in metri moltiplicando il risultato per il valore della velocità della luce (espressa in metri al secondo). In sostanza:

$$\frac{v_A}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c \cdot 3{,}299 \times 10^4\ \mathrm{s}}{(4 \cdot 3600 \cdot [c/(\mathrm{ms}^{-1})])\ \mathrm{m}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3{,}299 \times 10^4\ \mathrm{m}}{4 \cdot 3600\ \mathrm{m}}\right)^2}} = 0{,}400.$$

Infine, dalle (1) e (2) si ottiene:

$$\frac{v'_{\mathrm{B}}}{c} = -\frac{v''_{\mathrm{A}}}{c} = \frac{\frac{v_{\mathrm{B}}}{c} - \frac{v_{\mathrm{A}}}{c}}{1 - \frac{v_{\mathrm{A}}}{c} \cdot \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}} = 0{,}312.$$

3. Il testo dice: «I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione». Chi è l'altro? Qui parrebbe entrare in scena un terzo attore (l'altro): forse si tratta del comandante? Supporremo, invece, che si volesse dire: «I due astronauti si accordano per inviarsi l'un l'altro il tempo di arrivo».

E come si può "inviare il tempo"? Forse si tratta di una metonimia tratta dal linguaggio comune, inserita per rendere la descrizione più realistica e "familiare"[4].

In ogni caso, i due astronauti hanno misurato eguali tempi propri di arrivo sul rispettivo asteroide, cioè $t'_{\alpha} = t''_{\beta}$. L'astronauta di A ritiene di aver raggiunto per primo la propria meta perché riferisce le coordinate temporali degli eventi considerati – arrivo di A su α, arrivo di B su β – al proprio riferimento K', anziché a quello della Terra, come dovrebbe essere. Ovvero calcola[5]:

$$t'_{\beta} = \gamma_{\mathrm{AB}}\, t''_{\beta} > t''_{\beta} = t'_{\alpha}.$$

4. Anche l'astronauta di B adotta un criterio "egocentrico" per sostenere di aver "vinto". Riferendo gli eventi al proprio sistema K'', infatti, calcola:

$$t''_{\alpha} = \gamma_{\mathrm{AB}}\, t'_{\alpha} > t'_{\alpha} = t''_{\beta}.$$

Restando all'interno della favola spaziale immaginata da questo problema, appare strano che – prima della partenza – i due astronauti e il comandante rimasto sulla Terra non si fossero accordati sul criterio da adottare per attribuire la "vittoria" all'uno o all'altro pilota. E l'unico criterio "imparziale" sarebbe stato riferire gli eventi al sistema terrestre K; in K la situazione è chiara: poiché i due astronauti hanno misurato tempi propri eguali ($t'_{\alpha} = t''_{\beta}$) e l'astronauta di B andava più lontano, è l'astronauta di A ad aver raggiunto per primo la meta assegnata[6]. Infatti per l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale:

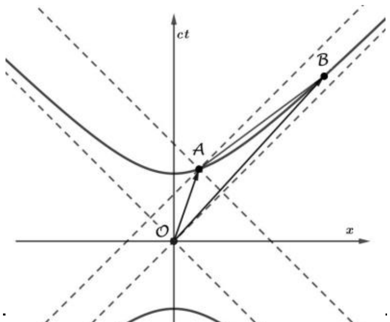
$$t_{\beta}^2 - \left(\frac{L_{0\beta}}{c}\right)^2 = t''^2_{\beta} = t'^2_{\alpha} = t_{\alpha}^2 - \left(\frac{L_{0\alpha}}{c}\right)^2$$

$$t_{\beta}^2 - t_{\alpha}^2 = \left(\frac{L_{0\beta}}{c}\right)^2 - \left(\frac{L_{0\alpha}}{c}\right) > 0$$

$$t_{\beta} > t_{\alpha}.$$

E qui la storia dovrebbe essere terminata. Invece no, abbiamo ancora un ultimo capitolo: la fantomatica "inversione temporale".

5. È facile spiegare la mancanza di un ordine temporale assoluto, cioè valido in tutti i sistemi di riferimento, per i due eventi $\mathcal{A}$ (arrivo di A su α) e $\mathcal{B}$ (arrivo di B su β). Consideriamo la mappa spazio-temporale qui accanto, disegnata per un sistema di riferimento solidale con la Terra.



Gli eventi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si trovano entrambi nel *futuro* di $\mathcal{O}$ (partenza dalla Terra); $\mathcal{B}$ si trova nel *presente* di $\mathcal{A}$ perché i due eventi appartengono alla medesima iperbole invariante $ct^2 - x^2 = \tau^2$, essendo $\tau_{\mathrm{A}} = t'_{\alpha} = t''_{\beta} = \tau_{\mathrm{B}}$.

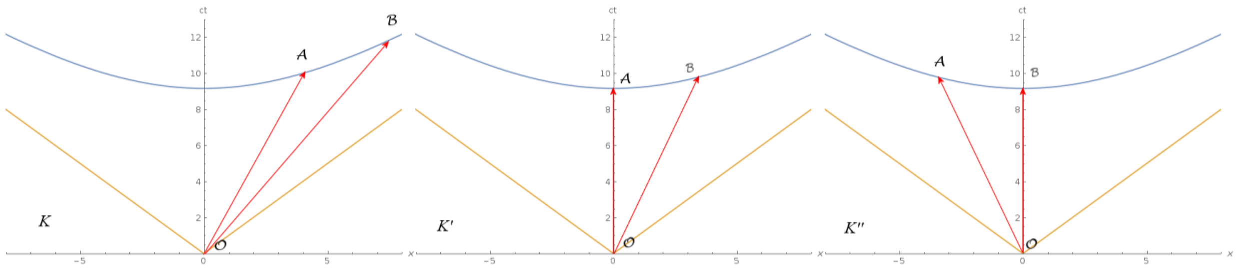
[4] F. Hermann, *La cosa e la misura*, La Fisica nella Scuola, n. 2, (2009), p. 80-89.

[5] γ_{AB} è il fattore di Lorentz calcolato con la velocità relativa fra le astronavi, v'_{B} o v''_{A}.

[6] Si possono anche calcolare esplicitamente i due tempi t_{A} e t_{B}:

$$t_{\mathrm{A}} = \frac{L_{0\alpha}/c}{v_{\mathrm{A}}/c} = \frac{4\ \mathrm{h}}{0{,}400} = 10\ \mathrm{h}, \qquad t_{\mathrm{B}} = \frac{L_{0\beta}/c}{v_{\mathrm{B}}/c} = \frac{7{,}5\ \mathrm{h}}{0{,}633} \cong 12\ \mathrm{h}.$$

Tra gli eventi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, in quanto separati da un intervallo di tipo-spazio, non può quindi sussistere una relazione d'ordine temporale definita assoluta, valida in tutti i riferimenti: nel riferimento solidale con A, l'evento $\mathcal{B}$ risulterà accadere dopo $\mathcal{A}$, ovvero $t'_\beta > t'_\alpha$. Viceversa, nel riferimento solidale con B, l'evento $\mathcal{B}$ risulterà accadere prima di $\mathcal{A}$. La situazione è ben illustrata dalle mappe spazio-temporali relative a ciascuno dei tre sistemi di riferimento.



Non pare corretto, invece, parlare di "inversione temporale", perché abitualmente con ciò si intende la trasformazione discreta dello spazio-tempo consistente nell'inversione dell'asse temporale: $t \to -t$.
Nella situazione considerata non c'è un'inversione temporale nello spazio-tempo di Minkowski, quanto piuttosto una trasformazione di Lorentz tra sistemi inerziali in moto relativo.

COMMENTI

– Più che una situazione "realistica", qui abbiamo una sorta di favola: astronavi che viaggiano a velocità relativistiche costanti (partendo dalla Terra?) verso due asteroidi lontani, allineati tra loro e con la Terra e praticamente fermi rispetto a questa?

– Se un'astronave dovesse partire, supponiamo, da un'orbita terrestre e raggiungere una velocità di $0{,}6\ c$ in un tempo trascurabile rispetto alla durata del viaggio (12 h nel riferimento terrestre), quale accelerazione dovrebbe avere? Un calcolo eseguito nell'ipotesi di 1 h di moto uniformemente accelerato[7] dà un risultato di circa $6400\ g$!

– Non parliamo poi della "gara": poiché presumibilmente le velocità di crociera delle astronavi sono note a priori (almeno al comandante sulla Terra) e le distanze degli asteroidi sono date, che gara è?

– Ciò detto, l'intero problema potrebbe essere tranquillamente risolto dalle tre mappe spazio-temporali che abbiamo disegnato per ultime. Il calcolo dei valori numerici delle varie velocità o dei tempi riferiti ai vari sistemi non ha, in realtà, alcun interesse per l'analisi della situazione (e neppure può soddisfare qualche curiosità, essendo tutta la vicenda assolutamente irreale).
Forse l'estensore del testo si proponeva di verificare come gli studenti sarebbero stati in grado di svolgere tutti i passaggi esplicitamente richiesti e di ricavare tutti i valori indicati, senza confondersi troppo?

– Come ultima cosa, osserviamo che il rispetto delle regole di scrittura di simboli e formule dovrebbe essere scontato in una prova d'esame. Al contrario troviamo il simbolo di una unità di misura SI scritto in corsivo e attaccato al valore (es. $4{,}317{\cdot}10^{12}m$), nonché misure di tempo scritte in modo fantasioso ($9h\ 9\mathrm{min}\ 54s$) con una originale miscela di tondo e corsivo. La convenzione più accettata per le misure di tempo miste consiste nello scrivere le unità in apice: $9^{\mathrm{h}}\ 9^{\mathrm{m}}\ 54^{\mathrm{s}}$.
Infine, benché le ore-luce non abbiano un simbolo ufficiale, si può usare ol (precisandone il significato in parentesi).

[7] Si vedano le considerazioni svolte nella risoluzione del Quesito 5 dell'Esempio di Matematica e Fisica, al punto: 'Un terzo modo'.