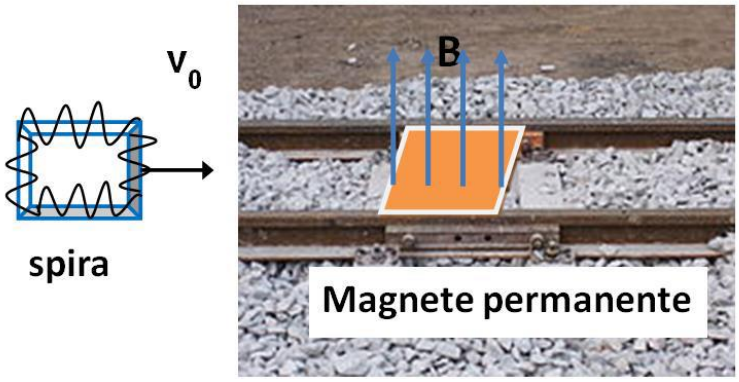
Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato L=5,0cm fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica R=0,020Ω. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1. Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

2. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico B=0,85T uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove m=50g è la massa del vagone.

3. Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0 e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

4. Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0{,}20\ {}^{m}/_{s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

5. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

RISOLUZIONE

Il testo del problema presenta diversi aspetti questionabili, sia formali che di merito, sui quali torneremo in seguito. Per il momento presentiamo una traccia di risoluzione che ne prescinde.

La figura mostra una strana “spira”: si vede in realtà una linea zigzagante appoggiata sopra un contorno rettangolare. Il testo, però, parla di “spira quadrata”. Si voleva forse descrivere un avvolgimento di filo attorno a una cornice (isolante) di forma quadrata? In mancanza di altre informazioni, tratteremo la cosa in questo modo, considerando il sistema equivalente a un singolo conduttore filiforme piegato a formare un quadrato. Del resto, anche con il filo avvolto attorno alla cornice si avrebbe un flusso del campo $\vec{B}$ attraverso l’area di un “quadrato” (dai bordi irregolari) e il flusso sarebbe concatenato una sola volta col circuito[1].

1. Con l’assunzione ora detta, si può spiegare l’azione di frenamento come una conseguenza della forza di Lorentz. Quando la spira inizia il suo transito sopra il magnete, la forza $\vec{F}_{\mathrm{L}} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$ agisce sugli elettroni del primo lato del conduttore e determina la comparsa di una f. e. m. $\mathcal{E} = vBL$. Questa genera nella spira una corrente di intensità $i = \mathcal{E}/R$; con il campo $\vec{B}$ orientato verso l’alto come nella figura e ammettendo che la spira si muova verso destra, la corrente indotta circola in senso orario. Sul tratto di conduttore considerato si esercita allora una forza magnetica $\vec{F} = iL\hat{\imath}\wedge\vec{B}$ (dove $\hat{\imath}$ è un versore orientato come la corrente nel tratto di filo); questa forza magnetica è orientata nella direzione del moto, ma ha verso opposto alla velocità: è, insomma, una forza frenante.

Se il primo tratto della spira attraversa tutta la regione sovrastante il magnete e ne esce, inizia a transitare nel campo magnetico il lato opposto del circuito. In questa fase la corrente circola in verso antiorario, la forza magnetica è applicata a un diverso tratto del circuito, ma è sempre allineata con la velocità e ha verso opposto a quella. L’effetto di frenamento cessa quando il sistema si ferma oppure quando tutta la spira ha oltrepassato la regione che sovrasta il magnete.

2. Per la seconda legge della dinamica, vale la relazione:

$$F = -iLB = -\frac{vB^2L^2}{R} = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Il segno negativo corrisponde al fatto che la forza e l’accelerazione hanno verso opposto a quello della velocità.

3. Consideriamo l’espressione data:

$$v = v_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{2}$$

e deriviamo rispetto a t:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{-v_0 e^{\frac{-t}{\tau}}}{\tau} = \frac{-v}{\tau}.$$

Questa espressione si riconduce alla (1) assumendo:

$$\tau = \frac{mR}{B^2L^2} = \frac{50 \times 10^{-3} \cdot 0{,}020}{0{,}85^2 \cdot (5{,}0 \times 10^{-2})^2}\ \mathrm{s} = 0{,}553633\ldots\ \mathrm{s} \cong 0{,}55\ \mathrm{s}.$$

[1] Per la geometria della situazione, si possono guardare le figure:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/Spulenflaeche.jpg
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/3/35/20120703182500%21Spulenflaeche.jpg

4. Perché la spira attraversi completamente la regione del magnete, il segmento frontale deve spostarsi di un tratto $2L$. Per determinare l'istante in cui $x = 2L$, è necessario ricavare l'equazione oraria del moto: riferiamoci dunque alla (2) che riscriveremo nella forma:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = v_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \mathrm{d}t.$$

Integrando:

$$\int_0^{2L} \mathrm{d}x = v_0 \int_0^t e^{\frac{-t}{\tau}} \mathrm{d}t$$

$$2L = v_0 \tau \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{2L}{v_0 \tau}\right) = -0{,}553633 \log\left(1 - \frac{2 \cdot 5{,}0 \times 10^{-2}}{0{,}20 \cdot 0{,}553633}\right) \mathrm{s} =$$
$$= 1{,}29237\ldots\ \mathrm{s} \cong 1{,}3\ \mathrm{s}.$$

In questo istante, la velocità vale:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v_0 e^{\frac{-t}{\tau}}} = 0{,}20\ \mathrm{e}^{\frac{-1{,}29237}{0{,}553633}}\ \mathrm{m/s} \cong 0{,}019\ \mathrm{m/s}.$$

5. Al punto precedente abbiamo espresso il tempo necessario perché la spira attraversi tutta la regione del magnete come:

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{2L}{v_0 \tau}\right).$$

Questa espressione fornisce sempre un valore di t, positivo, purché sia positivo l'argomento del logaritmo. Dunque deve essere:

$$1 - \frac{2L}{v_0 \tau} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 > \frac{2L}{\tau} = \frac{2 \cdot 5{,}0 \times 10^{-2}}{0{,}553633}\ \mathrm{m/s} \cong 0{,}18\ \mathrm{m/s}.$$

COMMENTO

Questo problema si vuol far credere legato a una situazione quotidiana, concreta, realistica.
Ma già dalle prime frasi sorge una seria perplessità, quando si legge di: «un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato *L* = 5,0 cm fissato tra le due rotaie del binario». Se il magnete sta tra le rotaie, bisogna che lo scartamento sia almeno altrettanto ampio. Ebbene, lo scartamento massimo usato nei treni modello è di 6,4 cm ed è, però, difficile da trovare e riservato a grossi modelli da usare all'aperto[2].

Prodotti in serie, nella cosiddetta scala G "metrica", vi sono dei modelli con scartamento di 4,5 cm. Le carrozze sono lunghe da 20 a 30 cm e costano da 100 € in su, un locomotore costa più di 1000 €. Sarebbe questo il "trenino elettrico" del fratellino? E uno di questi vagoni dovrebbe avere una massa di soli 50 g?

Ma quello che più si allontana dalla pretesa di realismo è il "piccolo magnete". Il testo gli attribuisce un campo uniforme di 0,85 T.
Se si cerca un magnete simile nel sito di qualcuno che vende magneti, si può trovare un esemplare di lato 50,8 mm che il venditore chiama: "magnete della morte"![3]
Sul medesimo sito, vi è la possibilità di calcolare l'intensità del campo magnetico alla superficie di un magnete permanente di date caratteristiche. Ebbene, il "magnete della morte" ha un campo di circa 0,4 T al centro della faccia quadrata (e, presumibilmente, poco più del doppio ai bordi).

[2] Tutte queste informazioni – caratteristiche, modelli e prezzi – si trovano facilmente su Internet. Per esempio: https://www.maerklin.de/en/products/gauge-1/
[3] https://www.supermagnete.it/blocchi-magneti-neodimio/parallelepipedo-magnetico-50.8mm-x-50.8mm-x-25.4mm-neodimio-n40-nichelato_Q-51-51-25-N

Nessun magnete permanente fornisce un campo uniforme e la variazione tra il centro e i bordi è anche più di due volte. Ma non è questo il problema: un magnete come quello qui descritto è davvero estremamente pericoloso (il nome è rivelatore)! L'ultima cosa da fare sarebbe darlo in mano a un bambino!

Quale vantaggio si ottiene a formulare un problema in questo modo? A noi sembrerebbe molto più onesto fare a meno di questo genere di "realismo". O, almeno, che si dovessero guardare prima i cataloghi della Märklin… per stare un po' più con i piedi per terra.

Incidentalmente: non dovrebbe essere complicato curare meglio la scrittura: i simboli delle unità di misura devono essere scritti in tondo e devono essere staccati con uno spazio dal valore della grandezza. Sono regole stabilite da decenni e gli insegnanti insistono da sempre con i loro studenti perché le rispettino. Trovarsi cose scritte male in un testo "ufficiale" non fa molto bene alla didattica.