



Didattica

Michele D'Anna¹,
Tommaso
Corridoni²

¹ Liceo cantonale,
Locarno
(retired)

² Liceo cantonale,
Bellinzona

¹ mbv.danna@gmail.com

La misura della forza d'attrito statico per un cilindro che rotola I

Abstract

An experiment is presented to measure the static friction force which allows a cylinder to roll without slipping on a horizontal plane. Starting from the basic laws of dynamics and the fact that the ratio between angular and linear momentum of the cylinder is a constant, a result which holds also for their rates of change, we derive a natural connection between forces and torques, determining this way the value of the static friction force. After comparing the experimental results with the predictions of a quantitative model, we finally discuss some aspects related to energy, as well as a possible extension of the experimental part.

Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro¹ è mostrare come un quadro concettuale alternativo per la trattazione del rotolamento di corpi rigidi, proposto in un precedente intervento [1], risulti molto utile per *interpretare fisicamente* i risultati ottenuti misurando la forza d'attrito statico che garantisce il rotolamento senza scivolamento di un cilindro su un piano orizzontale. L'interesse per questa situazione sperimentale nasce dal fatto che la determinazione di valore e verso di questa forza d'attrito pone tradizionalmente non poche difficoltà agli studenti. Nell'analisi di oggetti che rotolano, i libri di testo [2] mostrano infatti situazioni in cui essa agisce sia nella direzione *opposta* al moto, sia in quella *del* moto, discutendo indicazioni «tecniche» per ricavarne le caratteristiche nei due casi, ma senza considerazioni generali che aiutino lo studente a formarsi un'*idea fisica* del perché siano possibili entrambi. In genere, individuate forze e momenti coinvolti, agli studenti è chiesto di scrivere le equazioni cardinali per traslazione e rotazione, così che, imposta la condizione cinematica di rotolamento, si giunge al risultato algebricamente. Sebbene affini la capacità di risolvere problemi, tutto questo non elimina comunque le difficoltà di *comprensione fisica*, come assodato dalla ricerca didattica (si veda ad esempio [3]).

Per mostrare come si possa conciliare *senso fisico* e *formalizzazione*, inizieremo con il delineare un adeguato quadro concettuale di riferimento; illustreremo poi l'esperimento per la misura della forza d'attrito e ne presenteremo i risultati; in seguito mostreremo come il quadro introdotto si trasduca naturalmente in una modellizzazione dinamica finalizzata a determinare i parametri del sistema. In seguito verranno introdotti gli aspetti energetici, mentre per finire, oltre a riassumere i risultati, forniremo qualche cenno su possibili sviluppi sperimentali.

Il quadro concettuale di riferimento

L'approccio proposto si basa sulla seguente osservazione: il rapporto tra *momento angolare* e *quantità di moto* di un oggetto rigido che rotola è costante nel tempo [1], indipendentemente dai vincoli e dalle particolari condizioni esterne. Si consideri ad esempio un *cilindro rigido*, di raggio R e massa M che avanzi nella direzione positiva di un asse di riferimento x rotolando senza strisciare (fig. 1).

Nota ¹ Questo testo ripercorre essenzialmente l'intervento proposto al 58° Congresso dell'AIF *Didattica della fisica: quali orizzonti?*, tenutosi nell'ottobre del 2019 a Brescia.

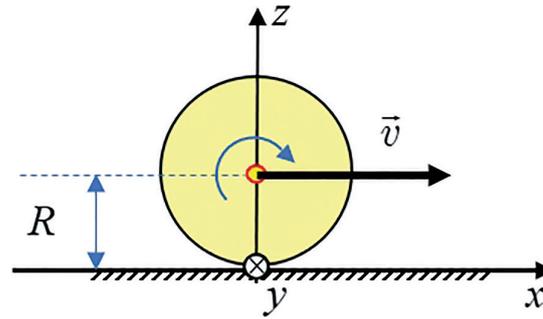


Figura 1. Cilindro che rotola: schematizzazione e orientamento del sistema di riferimento.

La *quantità di moto* p_x associata al moto di traslazione del cilindro sarà:

$$p_x = M v_x \quad (1)$$

dove v_x è la velocità del suo centro di massa (CM). Il *momento angolare* $L_{y,a}$, rispetto all'asse di rotazione a per il punto di contatto tra cilindro e piano, sarà invece²:

$$L_{y,a} = \theta_a \omega = (\theta_{CM} + MR^2) \omega = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \omega = \frac{3}{2} MR^2 \omega \quad (2)$$

dove θ_a è il momento d'inerzia rispetto all'asse a (dal teorema di Huygens-Steiner).

Ora, utilizzando esplicitamente la *condizione (cinematica) di rotolamento*:

$$v_x = R \omega \quad (3)$$

otteniamo quindi che il rapporto fra $L_{y,a}$ e p_x è *costante*:

$$\frac{L_{y,a}}{p_x} = \frac{\theta_a \omega}{M v_x} = \frac{\frac{3}{2} MR^2 \omega}{MR \omega} = \frac{3}{2} R \quad (4)$$

Questa *condizione dinamica di rotolamento* esprime semplicemente il fatto che la quantità di moto e il momento angolare del cilindro che rotola sono tra loro proporzionali, ma diventa decisamente più interessante se si osserva che, purché il cilindro continui a rotolare senza scivolare, essa deve essere soddisfatta *anche* dai rispettivi *tassi istantanei di variazione*. Infatti, in forza delle equazioni cardinali,

$$\dot{p}_x = F_{x,tot} \quad (5a)$$

$$\dot{L}_{y,a} = \tau_{a,tot} \quad (5b)$$

anche il rapporto tra il *momento meccanico totale* e la *forza totale* deve assumere il valore imposto dall'equazione (4):

Nota ² Nella modellizzazione dell'esperimento assumeremo che l'interazione tra cilindro e superficie d'appoggio non sia dissipativa, ossia che non vi siano deformazioni nella zona di contatto. Ciò è giustificabile sperimentalmente con l'osservazione che essa è del tutto trascurabile rispetto alla dissipazione localizzata sul perno del cilindro.

$$\frac{L_{y,a}}{p_x} = \frac{\dot{L}_{y,a}}{\dot{p}_x} = \frac{\tau_{y,a,tot}}{F_{x,tot}} = \frac{3}{2} R \quad (6)$$

Si è pertanto ottenuto un vincolo per le interazioni tra cilindro e piano: qualunque sia l'intervento esterno, se il cilindro rotola, la sua interazione con la superficie d'appoggio deve essere tale che il rapporto tra il momento meccanico totale (rispetto all'asse a) e la forza totale resti costantemente $3/2 R$.

Come esempio si consideri un cilindro trainato da una forza costante orizzontale, che agisca all'altezza del suo centro (fig. 2a):

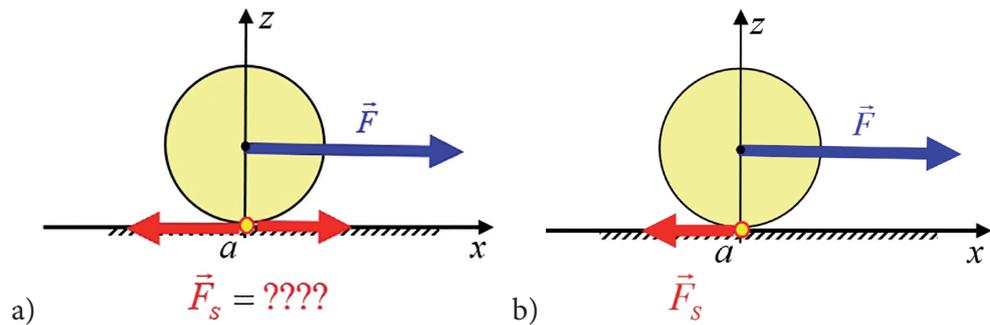


Figura 2. Rappresentazione schematica delle forze agenti sul cilindro in direzione orizzontale: a) oltre alla forza esterna, agisce anche una forza d'attrito statico, inizialmente di valore e direzione sconosciuti; b) situazione effettiva.

Per garantire il rotolamento, oltre a tale forza (applicata sul CM), nel punto di contatto tra cilindro e piano deve agire *anche* una forza d'attrito statico, della quale inizialmente non sono noti né valore né verso. La somma vettoriale di queste due forze determina la forza totale, mentre il momento meccanico rispetto all'asse di rotazione a (scelto non a caso) dipende unicamente dalla forza esterna:

$$\dot{p}_x = F_{x,tot} = F_x + F_{x,s} \quad (7a)$$

$$\dot{L}_{y,a} = \tau_{a,tot} = R F_x \quad (7b)$$

Dalla (6) possiamo concludere che in questa situazione vale:

$$\dot{p}_x = F_{x,tot} = \frac{2 \tau_{a,tot}}{3 R} = \frac{2 R F_x}{3 R} = \frac{2}{3} F_x < F_x \quad (8)$$

Ora, essendo la variazione istantanea della quantità di moto *minore* della forza esterna, *affinché non ci sia scivolamento* è necessario che sul cilindro agisca una forza che trasferisca dal cilindro al piano la quantità di moto *in eccesso*, ossia la forza d'attrito statico deve avere verso opposto rispetto a quello di avanzamento del cilindro. Inoltre, essendo la variazione istantanea della quantità di moto pari ai $2/3$ del flusso in entrata (ossia, della forza esterna), questo significa che l'eccesso trasferito al piano è pari a $F_x/3$. In breve, la forza d'attrito statico deve valere $1/3$ della forza esterna e deve essere rivolta in direzione opposta all'avanzamento del cilindro (fig. 2b):

$$F_{x,s} = F_{x,tot} - F_x = \frac{2}{3} F_x - F_x = -\frac{1}{3} F_x \quad (9)$$

Si noti come questo schema di ragionamento necessiti di un apparato formale ridotto ma essenziale, che permette di interpretare la situazione da un punto di vista fisico. Il poter determinare *anche sperimentalmente* il valore della forza d'attrito acquista quindi una sua specifica rilevanza didattica.

L'esperimento con il cilindro oscillante

L'apparecchiatura utilizzata per misurare la forza d'attrito (fig. 3) consiste in un cilindro di alluminio di raggio R e massa M imperniato su un supporto a doppio manico collegato con un filo a due molle (così che il rotolamento avvenga ora verso destra, ora verso sinistra), in modo che un sensore di rotazione permetta di determinare il suo spostamento³. Il cilindro può muoversi su di una lastra di *plexiglas*, orizzontale, fissata lateralmente ad un sensore di forza e poggiata su piccoli rulli metallici che la disaccoppiano meccanicamente (nella direzione orizzontale) dalla superficie del tavolo.



Figura 3. Apparecchiatura utilizzata per l'esperimento. Nei materiali aggiuntivi dell'edizione *on-line* si trova un video dell'esperimento qui descritto [6].

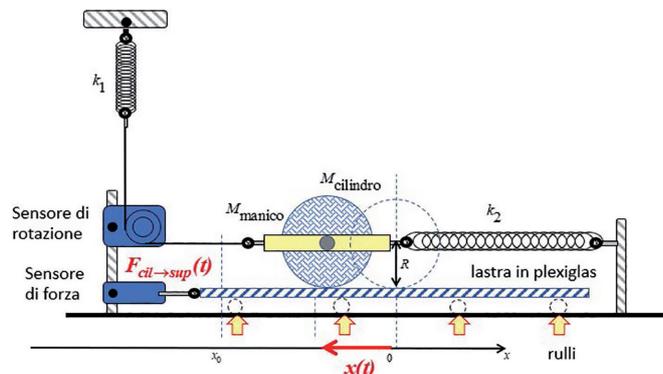


Figura 4. Rappresentazione schematica dell'apparecchiatura utilizzata.

Lo schema dell'esperienza (fig. 4) aiuta a capire come ricavare dalle grandezze misurate quelle che interessano. Per il principio di azione e reazione, la forza del cilindro sulla superficie d'appoggio è sempre opposta alla forza che la superficie esercita sul cilindro:

$$F_{x,s}(t) \equiv F_{x, \text{sup} \rightarrow \text{cil}}(t) = -F_{x, \text{cil} \rightarrow \text{sup}}(t) \quad (10a)$$

Nota ³ Per chiarire le condizioni sperimentali, il raggio del cilindro utilizzato è $R = 2.40$ cm, mentre la sua massa è $M_{\text{cil}} = 491$ g. La massa del manico è invece $M_{\text{man}} = 77$ g. La costante elastica di ciascuna delle due molle è $k = 3.5$ N/m.

Inoltre, essendo il collegamento manico-cilindro rigido, lo spostamento $x(t)$ del cilindro deve avvenire nel verso opposto alla forza del manico sul cilindro:

$$F_x(t) \equiv F_{x, \text{man} \rightarrow \text{cil}}(t) = \frac{M_{\text{cil}}}{M_{\text{cil}} + M_{\text{man}}} F_{\text{elast}}(t) = -\frac{M_{\text{cil}}}{M_{\text{cil}} + M_{\text{man}}} k x(t) \quad (10b)$$

Possiamo quindi concludere che il *segno relativo* tra le grandezze misurate (la forza del cilindro sulla superficie $F_{x, \text{sup-cil}}(t)$ e la posizione $x(t)$ del cilindro) coincide con quello tra le grandezze a cui siamo interessati, ossia la forza esterna e la forza d'attrito statico.

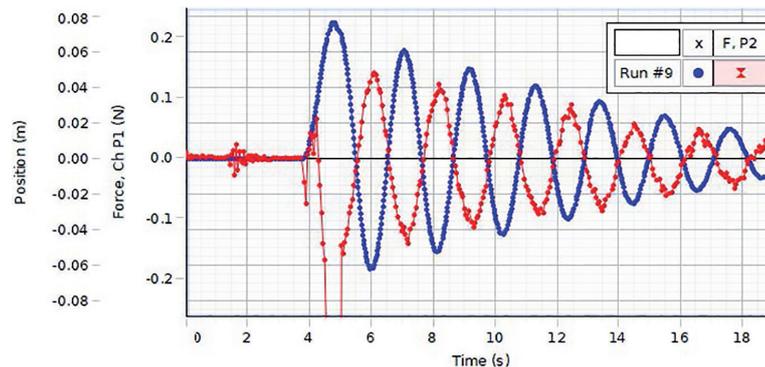


Figura 5. Tipico risultato sperimentale: in funzione del tempo sono rappresentate la posizione del cilindro (in blu) e la forza del cilindro sulla superficie (in rosso).

La figura 5 riporta un tipico risultato sperimentale: si osserva chiaramente che le due grandezze misurate sono costantemente di segno opposto. In base alle equazioni 10, allora anche la forza orizzontale esterna F_x e la forza d'attrito statico F_{x_s} agiscono costantemente in versi opposti.

La modellizzazione quantitativa

Per verificare *quantitativamente* il valore del rapporto fra forza esterna e forza d'attrito statico, il sistema va modellizzato in modo più preciso. In breve:

1. per poter utilizzare la condizione dinamica di rotolamento che lega quantità di moto e momento angolare del cilindro, *cilindro* e *manico* vanno considerati oggetti indipendenti, collegati tra loro da un dispositivo deformabile ma fortemente smorzato, così che pur restando separati, il loro movimento sia «sincronizzato» molto rapidamente;
2. si suppone che l'interazione tra cilindro e piano sia *non* dissipativa, e quindi descritta da una *forza di attrito statico*. Lo *smorzamento* dell'ampiezza dell'oscillazione è attribuito pertanto a un processo dissipativo localizzato nel collegamento cilindro-manico, che riduce il momento angolare ma *non* trasferisce quantità di moto;
3. scegliendo come asse di rotazione (a) quello passante per il punto di contatto tra cilindro e piano, il momento meccanico associato alla forza d'attrito, incognita, è comunque *nullo*, di modo che la variazione del momento angolare è dovuta unicamente al momento meccanico della forza del manico sul cilindro e al momento meccanico legato ai processi dissipativi, il cui valore può essere determinato fenomenologicamente accomodando lo smorzamento dell'ampiezza. Sebbene di per sé esso agisca sull'asse del cilindro, la sua presenza comporta una decrescita del momento angolare rispetto all'asse a che può essere contabilizzata sfruttando la proporzionalità diretta tra i due momenti angolari;

4. in seguito, attraverso la *condizione dinamica di rotolamento*, il momento meccanico totale permette di determinare la *forza totale* agente sul cilindro;
5. e per finire, la *forza d'attrito statico* può essere espressa come differenza tra la forza totale (che corrisponde al tasso istantaneo di variazione della quantità di moto) e la forza del manico sul cilindro.

Queste idee trovano una naturale trasposizione nel linguaggio della modellizzazione dinamica, basata sull'utilizzo di pochi simboli da organizzare su una superficie grafica: i «rettangoli», che rappresentano grandezze estensive (quantità che possono pensarsi metaforicamente come immagazzinate da un sistema); le «frecche con rubinetto», che rappresentano scambi di grandezze estensive tra sistema e ambiente; i «tondi», che permettono di introdurre nel modello altre grandezze necessarie ad esprimere relazioni costitutive del sistema; i «connettori», frecce sottili che indicano l'esistenza di dipendenze funzionali tra le grandezze, da inserire in apposite finestre di dialogo⁴. Senza entrare nei dettagli⁵, la figura 6 riporta una possibile modellizzazione per la situazione sperimentale considerata:

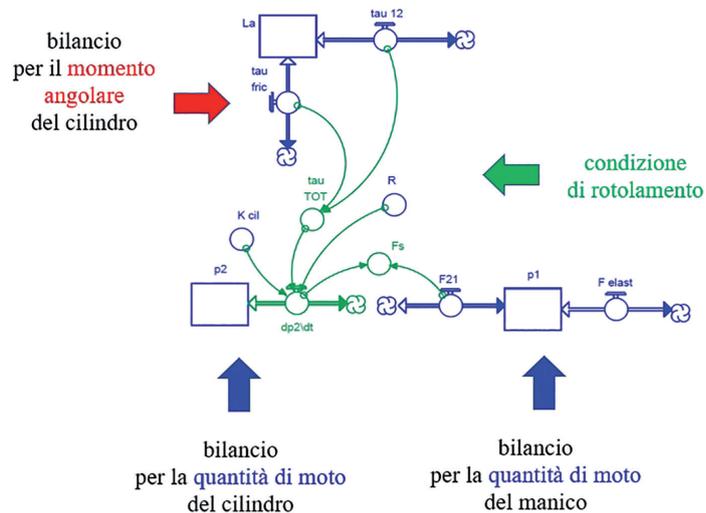


Figura 6. Schema di principio per la modellizzazione dinamica.

La sua struttura si fonda sulle equazioni di bilancio delle grandezze estensive conservate [5]: la *quantità di moto* del cilindro, il suo *momento angolare* e la *quantità di moto* del manico (rappresentate da rettangoli). Grazie alla condizione di rotolamento, è poi possibile collegare il tasso istantaneo di variazione del momento angolare con quello della quantità di moto del cilindro, così da poter ricavare il valore della forza d'attrito statico.

Un primo test del modello è la verifica che manico e cilindro si muovano quasi come fossero un unico oggetto (ciò che giustifica la relazione 10b), come conferma la figura 7.

Note ⁴ Alcune indicazioni specifiche e il modello completo con tutte le grandezze e le relazioni costitutive sono disponibili nei materiali aggiuntivi della versione *on-line* [6].

⁵ Per semplicità, per le varie grandezze fisiche anche qui ci limitiamo a considerare solo quelle componenti che intervengono in modo diretto a determinare la dinamica del moto del cilindro.

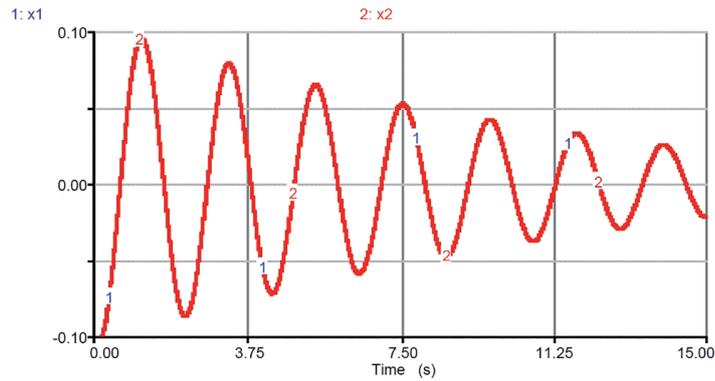


Figura 7. Verifica che le posizioni di cilindro (x_1) e manico (x_2) di fatto coincidono.

Nel grafico in figura 8 si confrontano poi i valori misurati per la posizione del cilindro con le previsioni del modello: l'accordo è ottenuto scegliendo in modo opportuno il coefficiente di smorzamento che governa il processo dissipativo fra cilindro e manico.

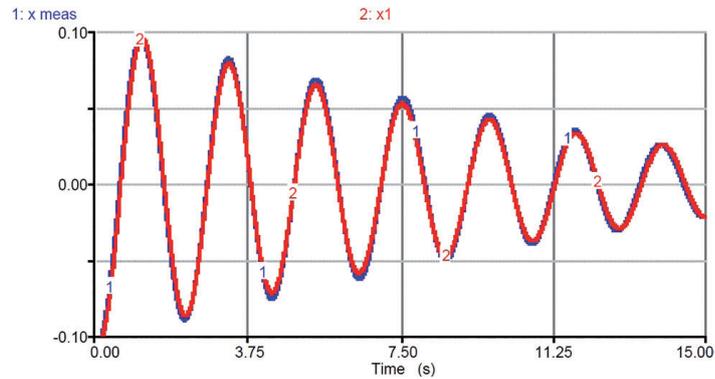


Figura 8. Posizione del cilindro in funzione del tempo: confronto tra dati sperimentali (in blu) e previsioni del modello (in rosso).

In figura 9 si riportano le varie forze calcolate dal modello: dopo una breve fase di assestamento della deformazione del collegamento manico-cilindro, la forza d'attrito statico (in verde) e la forza del manico sul cilindro (in rosso) risultano *stabilmente* una opposta all'altra.

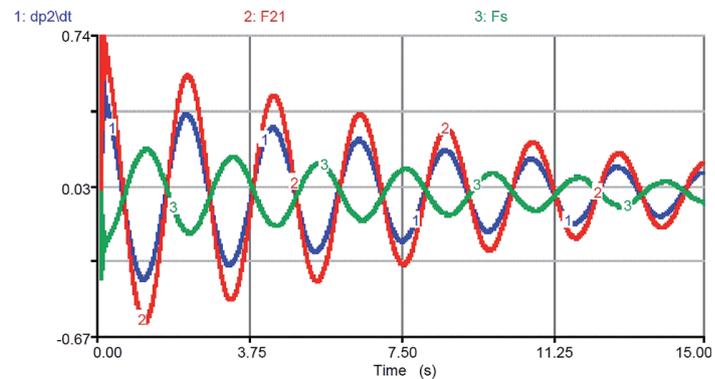


Figura 9. Le previsioni del modello per il tasso istantaneo di variazione della quantità di moto del cilindro (in blu) e per le forze che agiscono su di esso (forza del manico sul cilindro in rosso; forza d'attrito statico in verde).

Il risultato più importante è il confronto tra la forza misurata e le previsioni del modello per la forza d'attrito statico (figura 10). L'accordo, non perfetto ma soddisfacente, dimostra la validità della modellizzazione proposta e conferma la correttezza della procedura sperimentale adottata.

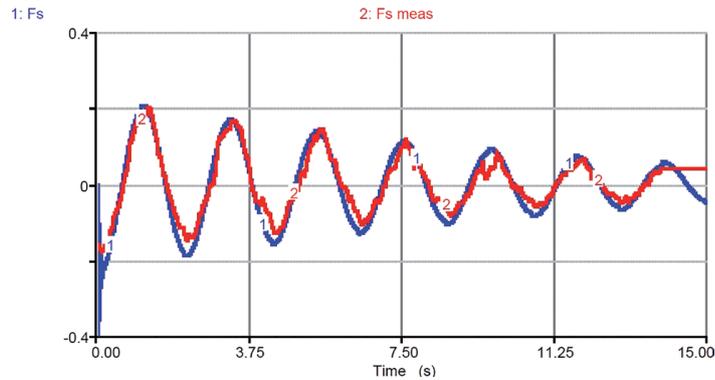


Figura 10. Valori misurati (rosso) e previsioni del modello (blu) per la forza d'attrito statico.

Aspetti energetici

Un ulteriore test per la coerenza interna della modellizzazione proposta è l'analisi degli aspetti energetici. Nel modello⁶ occorre inserire l'energia cinetica di traslazione del manico, l'energia cinetica di rotazione del cilindro (rispetto all'asse di rotazione a) e l'energia potenziale elastica associata alle molle. Ad un dato istante t , tutte queste grandezze possono essere determinate con i valori istantanei già presenti nel modello. La loro somma dà l'energia meccanica totale del sistema, mentre, data la presenza del processo dissipativo, per verificare la conservazione dell'energia occorre anche determinare la quantità di energia dissipata dall'inizio dell'oscillazione all'istante t considerato. Questo avviene in due fasi: prima si introduce nel modello la potenza istantanea dissipata (data dal prodotto tra velocità angolare e momento meccanico dissipativo) e poi si ottiene l'energia dissipata integrando questo contributo nel tempo.

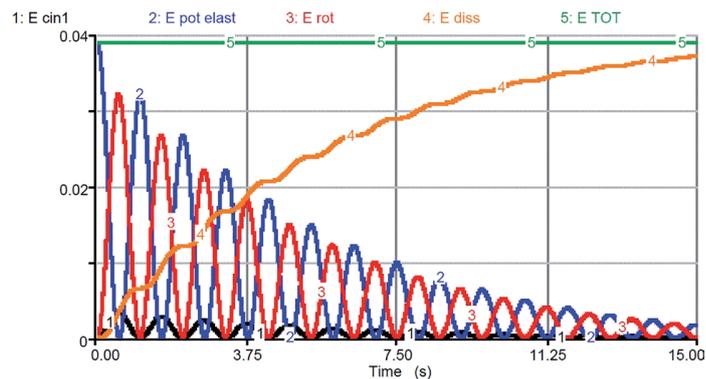


Figura 11. Aspetti energetici: energia cinetica di traslazione del manico (nero), energia cinetica di rotazione del cilindro rispetto all'asse di rotazione a (rosso), energia potenziale elastica delle molle (blu), energia dissipata (arancione). La loro somma (verde) risulta costante nel tempo, come richiesto dal principio di conservazione dell'energia.

Nota ⁶ Anche per gli aspetti energetici, nei materiali aggiuntivi che accompagnano l'edizione *on-line* [6] si trovano indicazioni più dettagliate.

La figura 11 mostra il risultato fornito dal modello così ampliato: la somma di tutti i contributi (E_{TOT}) è costante nel tempo, in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

Conclusioni e possibili sviluppi

In questo lavoro si è mostrato che:

1. l'esperimento presentato permette di misurare il valore della forza d'attrito statico che garantisce il rotolamento del cilindro;
2. il modello sviluppato consente di interpretare fisicamente il comportamento del cilindro e delle sue interazioni con l'ambiente circostante;
3. il confronto tra i valori misurati e le previsioni ottenute con la modellizzazione dinamica risulta essere più che soddisfacente.

Sulla base di questi risultati possiamo chiederci se è possibile estendere questo approccio anche ad *altre* situazioni, in particolare variando il punto di applicazione della forza esterna orizzontale (fig. 12): come si comporterà la forza d'attrito statico che garantisce il corretto rapporto tra gli scambi di momento angolare e quantità di moto?

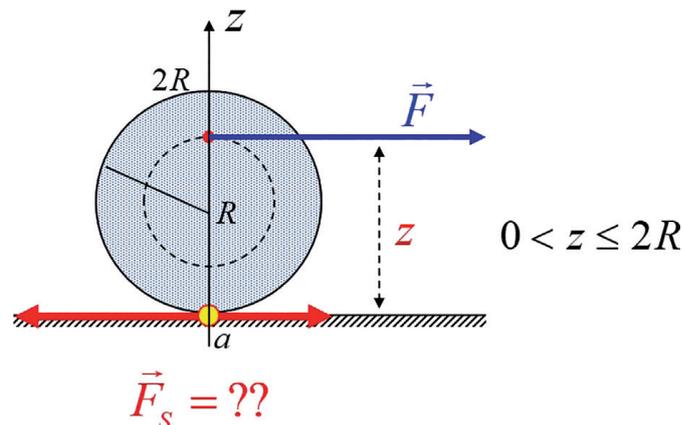


Figura 12. Schema di principio per l'estensione dell'indagine sperimentale: cosa capita quando il punto di applicazione della forza orizzontale viene spostato verticalmente?

Per ottenere la risposta basta ripetere l'analisi delineata nelle equazioni 8 e 9, con un'unica modifica che riguarda il braccio z della forza agente ($0 < z < 2R$). Si ottiene:

$$\dot{p}_x = F_{x,tot} = \frac{2 \tau_{a,tot}}{3 R} = \frac{2 z F_x}{3 R} \tag{11}$$

e

$$F_{x,s}(z) = F_{x,tot} - F_x = \frac{2z}{3R} F_x - F_x = \left(\frac{2z}{3R} - 1\right) F_x \tag{12}$$

Come riportato nella figura 13, si osserva prima di tutto che, a seconda del valore scelto per z , la forza d'attrito statico può essere rivolta sia in avanti che indietro:

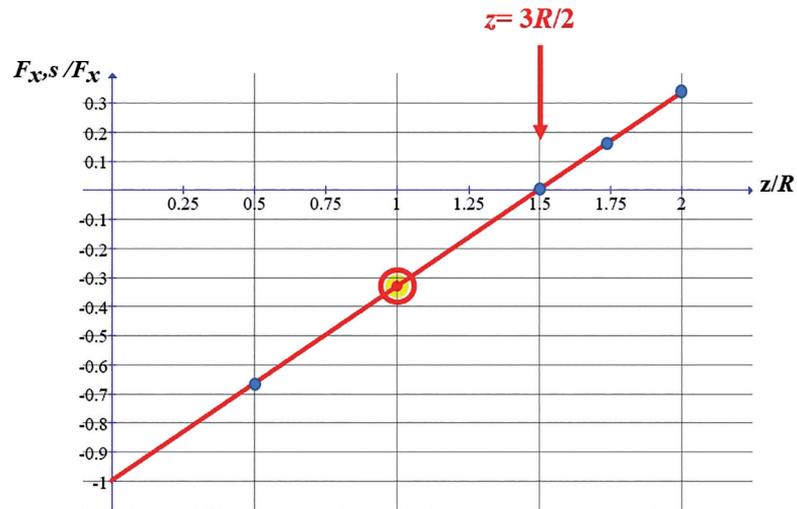


Figura 13. Previsioni per la forza d'attrito statico al variare della quota (z) del punto di applicazione della forza esterna. Il punto evidenziato corrisponde alla situazione sperimentale presa in considerazione nel presente lavoro; si osserva inoltre la presenza di una situazione in cui per avere il rotolamento non è necessaria la presenza di nessuna forza d'attrito statico.

Vi è anche un'altezza per la quale essa vale zero: possiamo interpretare questa situazione dicendo che l'azione del manico trasferisce al cilindro momento angolare e quantità di moto nelle giuste proporzioni, così che l'interazione fra cilindro e superficie d'appoggio *non* deve intervenire a bilanciare gli scambi. Per quanto riguarda la verifica sperimentale, l'apparecchiatura necessaria è al momento in fase di costruzione*.

- Bibliografia**
- [1] D'ANNA, M., Oggetti che rotolano, *Atti del 52° Congresso AIF 2013, Nuove tecnologie e insegnamento della fisica*, 23-26 ottobre 2013, Mondovì, *La Fisica nella Scuola XLVII* sup. 4, 112 (2014), 26-35.
 - [2] HALLIDAY, D., RESNIK, R., WALKER, J., *Fundamentals of Physics*, 8 edition, John Wiley & Sons, New York, 2007. In particolare: Cap. 11 "Rolling Motion and Angular Momentum", 332 e 358.
 - [3] ARONS, A., *Guida all'insegnamento della fisica*, Zanichelli, Bologna, 1992.
 - [4] D'ANNA, M., Il quadro concettuale di riferimento, in *Progetto StrIIT*, vol. 1, www.scuoladecs.ch/StrIIT2011/scarica/StrIIT_11.pdf, DECS, Bellinzona, 21-85.
 - [5] Link approfondimenti: t.ly/ZmCH.
 - [6] D'ANNA, M., FUCHS, H.U., 2021 Rolling cylinder and static friction: model and experiments, *Eur. J. Phys.*, **42**, (2021), 025007.

Nota * Aggiornamento: l'apparecchiatura è stata realizzata e l'esperimento eseguito con successo. I risultati sono presentati in [6] e saranno oggetto di una futura comunicazione di questa rivista.