

**Massimiliano  
Malgieri**

*Dipartimento di Fisica,  
Università di Pavia*  
massimiliano.malgieri01@  
universitadipavia.it

**Paolo Mascheretti**

*Dipartimento di Fisica,  
Università di Pavia*

**Pasquale Onorato**

*Dipartimento di Fisica,  
Università di Trento*  
pasquale.onorato@unitn.it

**Anna De Ambrosi**

*Dipartimento di Fisica,  
Università di Pavia*  
anna.deambrosivigna@  
unipv.it

# Variazioni sperimentali su un tema della simulazione dell'esame di Stato

(Pervenuto il 23.12.2016, approvato il 2.2.2017)

## ABSTRACT

In this article we describe and analyse an experiment on magnetic induction performed using an apparatus inspired by one of the problems proposed in the latest simulation of the final State exam for Physics. The experimental measurements are in good agreement with the mathematical model suggested in the simulation, and we propose an experimental verification, complete with error analysis, of the various questions posed in the problem. We then describe how the apparatus, with minor modifications, can be used to introduce other topics which are relevant for the Physics curriculum in the final year of Liceo Scientifico: we propose an analysis of the phenomenon of magnetic damping, and a brief introductory demonstration on the behaviour of LEDs.

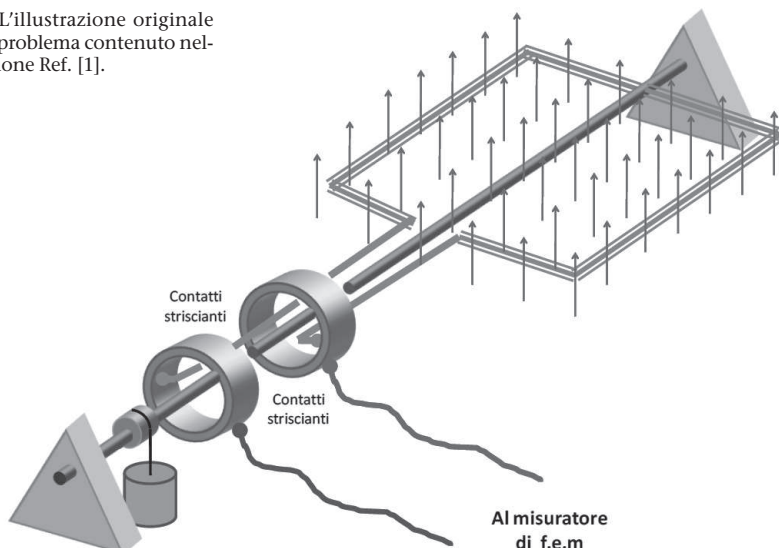
## Introduzione

L'introduzione della nuova prova scritta di Fisica nell'esame finale del secondo ciclo di istruzione occupa uno spazio rilevante all'interno del dibattito nazionale tra gli insegnanti. Nell'ottobre 2016, il MIUR, proseguendo nel lavoro preparatorio verso tale obiettivo, ha pubblicato una nuova simulazione [1], che è stata diffusa nella comunità degli insegnanti e discussa in una serie di conferenze di servizio regionali. La simulazione ha attirato una significativa quantità di critiche, da varie fonti [2,3], che hanno riguardato l'eccessiva difficoltà della prova, le richieste in termini di integrazione delle conoscenze sproporzionate all'effettivo quadro orario disponibile per la materia nel Liceo Scientifico, la mancanza di una gradualità e progressività nella valutazione<sup>1</sup>.

Gli autori di questo articolo condividono molte di tali critiche, anche se ritengono, in generale, che non vada censurato ma incoraggiato lo sforzo complessivo del Ministero di portare la prova scritta di Fisica all'esame di stato. In ogni caso, dopo aver letto, risolto e discusso il primo problema della simulazione proposta, riguardante l'induzione magnetica, abbiamo raggiunto due conclusioni: 1) che il problema proposto era probabilmente, e fatte salve le eccellenze che comunque si trovano nelle classi quinte del Liceo, troppo difficile per gran parte degli studenti i quali, con ogni probabilità, non si erano mai imbattuti né nella realtà, né in un esercizio del libro di testo, in un apparato simile a quello proposto; 2) che, se non si poteva concordare con il Ministero sul fatto che l'apparato sperimentale proposto fosse adeguato a verificare le conoscenze e le competenze degli studenti al momento dell'esame di stato, si poteva però certamente convenire sul fatto che l'oggetto fosse estremamente interessante e ricco dal punto di vista della quantità di concetti fisici rilevanti che esso metteva in gioco; e che fosse certamente entro le possibilità degli studenti studiarlo e imparare a modellizzarne il comportamento in laboratorio, se fosse stato fornito loro tempo e strumenti adeguati.

Abbiamo perciò deciso di costruire l'apparato descritto nel problema (l'illustrazione originale inclusa nel testo è riportata in Figura 1), al fine di utilizzarlo nell'ambito dei laboratori PLS sull'induzione magnetica per gli studenti di quinta superiore dell'Università di Pavia. L'apparato è stato progettato e costruito da

Figura 1. L'illustrazione originale del primo problema contenuto nella simulazione Ref. [1].

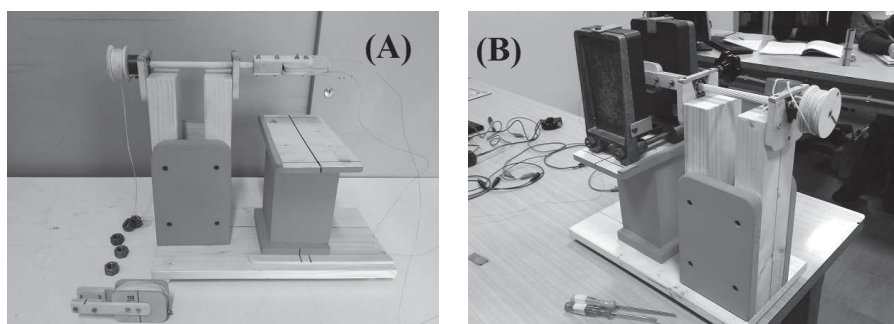


Paolo Mascheretti, dopo una discussione con gli altri co-autori sui migliori parametri di progetto e realizzazione.

### L'apparato sperimentale

Il nostro apparato è mostrato in Figura 2. Due cuscinetti a sfera, fissati in un supporto di legno, permettono ad un'asta, anch'essa di legno, di ruotare minimizzando l'attrito. All'asta è fissato, ad una estremità, un rocchetto di diametro  $d = (4.50 \pm 0.02)$  cm, attorno al quale è avvolto un filo a cui possono essere fissate una o più masse. All'altra estremità viene fissata attraverso viti di ottone (non magnetizzabili) una bobina; a scopi didattici abbiamo reso la bobina sostituibile, in modo da poter, eventualmente effettuare esperimenti con bobine con diverse caratteristiche. Il campo è fornito da due magneti di ferrite a forma di parallelepipedo, montati su un supporto metallico regolabile che rende possibile incrementare o ridurre lo spazio tra le due lastre magnetiche. Tale magnete era già disponibile nei laboratori didattici del Dipartimento di Fisica, dove viene solitamente utilizzato per esperimenti sulle forze magnetiche [4].

Figura 2. L'apparato sperimentale (A) senza magnete, con le due bobine utilizzate nell'articolo e alcune masse visibili, (B) con il magnete montato, pronto per essere utilizzato.



Confrontando l'apparato costruito con lo schema riportato nel testo originale del problema, l'unica differenza concettuale risulta essere l'assenza dei contatti striscianti. Si è pensato che tale caratteristica non fosse essenziale in vista

del reale utilizzo dell'apparato; infatti, il numero dei giri che esso deve compiere mentre la massa cade, in funzione dell'altezza a cui viene posto, è dell'ordine della decina. Si sono quindi lasciati liberi i capi della bobina dalla parte dell'estremità dell'asta, valutando che, se durante la caduta i fili si fossero avvolti su loro stessi una decina di volte, questo non avrebbe creato problemi di misura, come è infatti risultato in pratica.

**Funzionamento  
a circuito  
aperto: il tema  
dell'esame  
di stato**

Il tema dell'esame di stato richiedeva di prevedere l'andamento temporale della f.e.m. ai capi della bobina ignorando, sostanzialmente, ogni tipo di attrito e considerando quindi l'accelerazione angolare  $\alpha$  come costante (come "un parametro"). Riportiamo brevemente l'analisi che conduce a prevedere un'accelerazione angolare costante in assenza di attriti, e la conseguente previsione per la f.e.m. ai capi della bobina.

Consideriamo l'intera parte girevole dell'apparato come un corpo rigido di momento di inerzia  $I$ . Consideriamo il filo di massa trascurabile, di spessore trascurabile ed inestensibile. L'accelerazione angolare  $\alpha$  dell'asse girevole e l'accelerazione lineare  $a$  della massa durante la caduta sono legati dalla relazione:

$$a = \alpha \cdot r \quad (1)$$

dove  $r = d/2$  è il raggio del rocchetto al quale è avvolto il filo. Le altre equazioni che regolano la dinamica del sistema sono

$$\begin{cases} I\alpha = rT \\ ma = mg - T \end{cases} \quad (2)$$

dove  $T$  è la tensione del filo e  $m$  è la massa agganciata al filo. Dalle equazioni precedenti si ottiene

$$\alpha = \frac{g}{r \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \quad (3)$$

Si può osservare che quanto più si aumenta la massa  $m$ , tanto più l'accelerazione angolare dell'asse si avvicina a  $g/r$ . Naturalmente, una massa eccessiva può causare deformazioni indesiderate dell'apparato.

Se chiamiamo  $\vartheta(t)$  l'angolo formato dall'asse perpendicolare al piano della bobina e dal campo magnetico a un certo istante  $t$ , il flusso magnetico totale attraverso la bobina all'istante  $t$  sarà:

$$\Phi = NAB \cos \vartheta(t) \quad (4)$$

dove  $N$  è il numero di avvolgimenti della bobina e  $A$  è l'area di ciascuna spira, nell'ipotesi di considerare trascurabile anche lo spessore del filo di rame. Se supponiamo che all'istante iniziale  $t=0$  l'asse perpendicolare alla bobina formi con il campo magnetico  $B$  un angolo  $\vartheta(0) = 0$  e non stia ancora ruotando, possiamo scrivere:

$$\Phi(t) = NAB \cos \frac{\alpha t^2}{2} \quad (5)$$

Con  $\alpha$  dato dalla Eq. (3). Derivando la Eq. (5) si può ottenere la f.e.m. ai capi della bobina che risulta:

$$\text{f.e.m.} = -NAB\alpha t \sin \frac{\alpha t^2}{2} \quad (6)$$

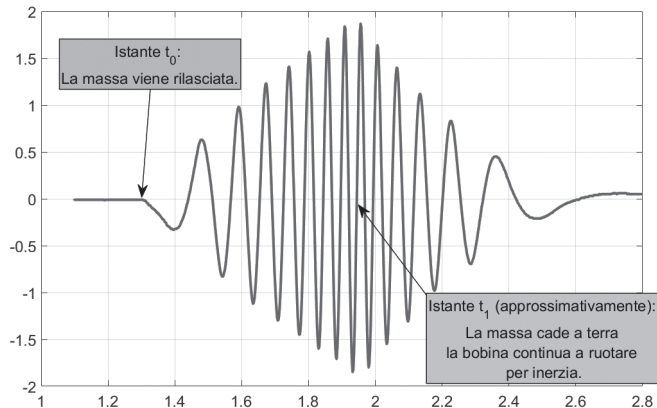
L'esperimento viene effettuato lasciando cadere una massa  $m = (57.2 \pm 0.5)$  g, costituita da due dadi d'acciaio come quelli visibili in Figura 2(A) con l'apparato posto su un bancone da laboratorio, per un'altezza totale di caduta  $h = 1.10$  m. Il momento di inerzia della parte rotante dell'apparato, da noi misurato<sup>2</sup>, risulta  $I = (1.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-5}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>; quindi in base a Eq. (3) i valori attesi dell'accelerazione e dell'accelerazione angolare sono

$$a = (6.3 \pm 0.4) \text{ m/s}^2; \quad \alpha = (280 \pm 20) \text{ rad/s}^2 \quad (7)$$

La massa viene rilasciata con la bobina approssimativamente perpendicolare al campo magnetico. La f.e.m. viene misurata con il sensore di tensione-corrente PASCO PS-2115 posto ad una frequenza di campionamento di 500 Hz e visualizzata attraverso il software PASCO *Capstone*, che permette di svolgere anche le analisi riportate in questo articolo, come il *fit* dei dati con funzioni definite dall'utente. Le figure che riportiamo sono tuttavia in molti casi ottenute esportando i dati su *Matlab*.

Le diverse misure effettuate forniscono un'andamento della f.e.m. simile a quello mostrato in Figura 3:

Figura 3. Tipico andamento della f.e.m. ai capi della bobina durante l'esperimento.



La f.e.m. misurata segue, almeno approssimativamente, l'andamento previsto dall'Eq.(6) nell'intervallo tra l'istante  $t_0$  in cui la massa viene rilasciata, fino all'istante  $t_1$  in cui essa tocca terra; prima di  $t_0$  la f.e.m. misurata è ovviamente nulla, mentre dopo  $t_1$  l'asse che regge la bobina ruota ancora per alcuni giri per inerzia, con velocità angolare decrescente, fino a fermarsi.

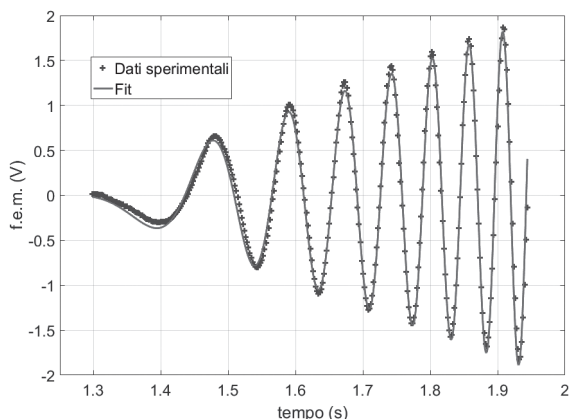
Basandoci sull'Eq. (6), eseguiamo un *fit* dei dati nell'intervallo  $[t_0, t_1]$  con una funzione del tipo:

$$f(t) = -\eta(t - t_0) \sin(\lambda(t - t_0)^2) \quad (8)$$

Il *fit* risultante, come si può vedere in Figura 4, è molto buono ( $R^2 = 0.989 \div 0.992$ ) a seconda delle diverse misure). Tuttavia, come si vedrà dalla successiva analisi con *Tracker* del caso di bobina cortocircuitata con e senza campo magnetico, l'accelerazione della massa appesa al filo è solo approssimativamente costante,

perchè vi è un contributo di attriti di tipo viscoso di varia origine. L'accelerazione che ricaviamo dal *fit* va quindi considerata un valore medio, che conduce comunque ad una buona corrispondenza con il modello di moto uniformemente accelerato.

Figura 4. Dati nell'intervallo  $[t_0, t_1]$  e *fit* basato su Eq. 8 per una delle misure. In questo particolare caso risulta  $R^2 = 0.992$ .



Le misure ripetute effettuate in identiche condizioni forniscono valori abbastanza consistenti per i parametri  $\eta$  e  $\lambda$ . Riportiamo nella tabella seguente i dati ottenuti per le quattro misure da noi effettuate in queste condizioni e i corrispondenti valori dei parametri

Parametro	Misura 1	Misura 2	Misura 3	Media $\pm$ errore
$\eta$	2.81	2.69	2.87	$2.8 \pm 0.1$
$\lambda$	100.9	96.6	103.4	$100 \pm 3$

Tabella 1. I valori dei parametri  $\eta$  e  $\lambda$  di Eq. (8) ricavati dal fit di tre serie di dati, e il loro valore medio.

Da questi valori è possibile ottenere immediatamente l'accelerazione angolare media  $\alpha = 2\lambda = (200 \pm 6) \text{ rad/s}^2$  e l'accelerazione lineare media  $a = r\alpha = (4.5 \pm 0.1) \text{ m/s}^2$  durante la caduta. Tali valori differiscono significativamente da quelli previsti in Eq. (7), ad ulteriore riprova che i parametri ricavati dal modello con accelerazione costante vanno interpretati come valori medi durante la caduta.

Direttamente in *Capstone* utilizzando la funzione "area" è possibile verificare anche un'altra proprietà utilizzata nel problema: quella che le cupole corrispondenti ad un semiperiodo di oscillazione hanno area costante. La proprietà non riguarda solo il caso di accelerazione costante, ma vale in generale, a causa del fatto che la f.e.m. è proporzionale alla derivata del flusso magnetico rispetto al tempo: infatti, se l'angolo  $\vartheta$  varia secondo una qualunque funzione derivabile  $\vartheta(t)$ , la f.e.m. avrà la forma

$$\text{f.e.m.} = -NAB\dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \tag{9}$$

e l'integrale tra due istanti  $t_{i,\vartheta=0}$  e  $t_{i,\vartheta=\pi}$  in cui l'angolo  $\vartheta$  vale, rispettivamente, 0 e  $\pi$  sarà

$$\int_{t_{i,\vartheta=0}}^{t_{i,\vartheta=\pi}} -NAB\dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) dt = NAB \cos \vartheta(t) \Big|_{t_{i,\vartheta=0}}^{t_{i,\vartheta=\pi}} = -2NAB \tag{10}$$

Cioè corrisponderà alla variazione di flusso attraverso la bobina in mezzo giro, corrispondente al doppio del flusso massimo. Ad esempio, per la Figura 3 le aree delle prime 10 cupole visibili risultano in valore assoluto:

Cupola	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area $2\Phi$ (V·s)	0.0269	0.0271	0.0270	0.0273	0.0272	0.0271	0.0271	0.0271	0.0270	0.0270

Tabella 2. Valori delle aree delle prime 10 cupole positive visibili in Figura 3.

con un valor medio su tutte e cupole che risulta  $2\Phi = (0.0271 \pm 0.0001) \text{ V} \cdot \text{s}$ . Il valore è compatibile con quello ricavato dalla stima precedente dei parametri  $\eta$  e  $\lambda$ ; infatti da  $2\Phi = \frac{\eta}{\lambda}$  si ricaverebbe  $2\Phi = (0.028 \pm 0.002) \text{ V} \cdot \text{s}$ . La misura attraverso l'area delle cupole è però significativamente più precisa, utilizziamo quindi tale misura per stimare il campo magnetico medio all'interno dello spazio fra i magneti.

Le spire sono montate intorno ad un nucleo rettangolare di legno, di dimensioni  $6.36 \times 3.18 \text{ cm}$ , per un'area totale  $A_{INT} = 20.2 \text{ cm}^2$ . Le spire più esterne però, a causa dello spessore del filo, se misurate risultano occupare un'area  $A_{EST} = 24.2 \text{ cm}^2$ . Utilizziamo per semplicità il valor medio  $A = 2.22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ; le spire sono  $N = 100$  perciò si ha:

$$B = \frac{\Phi}{NA} = (0.061 \pm 0.003) \text{ T} \quad (11)$$

Il valore di  $B$  ricavato va considerato un valore mediato sullo spazio occupato dalla spira durante la rotazione. Eventuali disomogeneità nella sola direzione orizzontale non produrrebbero alcun particolare problema teorico, a patto appunto di considerare il valore ricavato come medio; non è così per disomogeneità nella direzione verticale, che avrebbero l'effetto di modificare l'andamento temporale del flusso magnetico nella spira. La giustificazione per l'adozione di un modello di campo magnetico costante, almeno per linee verticali, all'interno dei magneti, può essere data a posteriori, osservando il buon accordo dei dati sperimentali con il modello adottato. Osserviamo che la disposizione dell'apparato (Figura 3B: la spira è posta al centro dello spazio tra i due magneti, e ruota intorno ad un asse parallelo al suo lato più lungo, ortogonale al lato più lungo dei magneti) è pensata proprio per minimizzare gli effetti di bordo del campo magnetico che coinvolgono la direzione verticale. Una misura del campo prodotto dallo stesso magnete (ma con una minore apertura) dalla quale si osserva che esso, in quel caso, è con ottima approssimazione omogeneo fino a circa 2 cm dal bordo, è stata precedentemente pubblicata in Ref. [5].

L'esperimento condotto si adatta bene al modello semplificato di accelerazione costante durante la caduta. Risultati e *fit* ancora migliori si possono ottenere con un modello più complesso, che tiene conto di un'accelerazione che decresce nel tempo durante la caduta. Tale modello include, in un unico termine di attrito viscoso, la resistenza dell'aria, parte dell'attrito dovuto ai cuscinetti a sfere (vedi l'analisi nel paragrafo successivo) e l'effetto (che riteniamo tuttavia trascurabile) di possibili correnti parassite a circuito aperto, soprattutto nelle due viti di ottone. Riportiamo, in Figura 5, un *fit* dei dati con tale modello più complesso con alcuni commenti nella didascalia della figura. Osserviamo che il valore dell'accelerazione angolare iniziale (a velocità nulla)  $\alpha_0$  ottenuto da questo modello è in discreto accordo con quello previsto in Eq. (7).

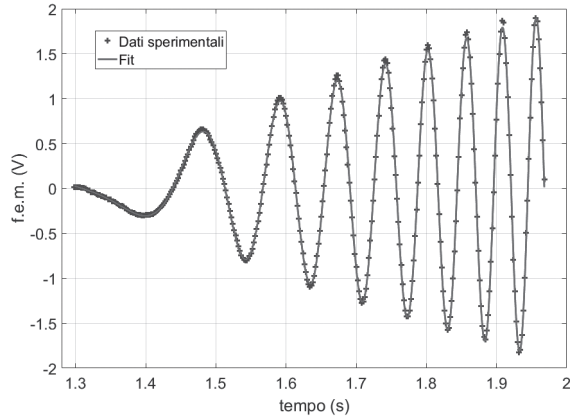


Figura 5. *Fit* dei dati con un modello di accelerazione non costante per la presenza di attrito viscoso. La posizione della massa è modellizzata come soluzione dell'equazione differenziale  $\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) = a_0$ , dove  $a_0$  è l'accelerazione in assenza di attrito viscoso, corrispondente al valore di  $a$  teorico nelle Eq. (1-3). Questo conduce al modello per l'andamento della f.e.m.:

$$\text{f.e.m.}(t) = -NAB \frac{a_0}{rk} (1 - e^{-kt}) \sin \left( \frac{a_0}{rk} \left( t + \frac{1}{k} (e^{-kt} - 1) \right) \right).$$

Il *fit* è quindi con una funzione del tipo  $\text{f.e.m.}(t) = \mu(1 - e^{-kt}) \sin \left( \frac{\alpha_0}{k} \left( t + \frac{1}{k} (e^{-kt} - 1) \right) \right)$ . I valori migliori dei parametri rilevanti del *fit* risultano  $\mu = (4.46 \pm 0.01)\text{V}$ ,  $\alpha_0 = (267.8 \pm 0.1)\text{rad/s}^2$  e  $k = (0.083 \pm 0.01)\text{s}^{-1}$ . Il *fit* è in questo caso praticamente perfetto,  $R^2 = 0.999$ .

### Funzionamento a circuito chiuso: il freno magnetico

L'apparato costruito può essere utilizzato anche per dare agli studenti un'interessante dimostrazione del fenomeno del "freno magnetico" [5]. Allo scopo abbiamo preparato una diversa bobina, composta da  $N = 125$  spire per una superficie totale  $N A = (3400 \pm 10)\text{cm}^2$  realizzate con un filo di rame di diametro dichiarato  $d = 0.7\text{mm}$  al fine di ridurre la resistenza elettrica. L'errore sulla superficie totale  $NA$  è ridotto perché abbiamo in questo caso misurato con precisione l'area e la lunghezza del filo per ciascuno strato di spire, anche al fine di valutare accuratamente l'impedenza della bobina stessa, come si vedrà alla fine di questa sezione. La bobina è, in questo caso, cortocircuitata. Utilizziamo per il magnete ad apertura regolabile la stessa apertura (7 cm) che nel caso precedente, e quindi possiamo utilizzare, sia pure con qualche cautela perché la nuova spira è leggermente più larga, il valore medio di  $B$  precedentemente ottenuto,  $B = (0.061 \pm 0.003)\text{T}$ . Il moto di caduta della stessa massa del caso precedente,  $m = (57.2 \pm 0.5)\text{g}$  viene confrontato nei casi di campo magnetico assente (il magnete viene rimosso) oppure presente. La differenza, ossia il rallentamento della massa nel secondo caso, è visibile ad occhio (si veda la differenza dei tempi di caduta in Figura 6). Al fine di un'analisi quantitativa abbiamo effettuato riprese video dell'esperimento, tre volte per ciascuno dei due casi senza magnete/con magnete, con uno smartphone BQ Aquaris M5, capace di riprendere in slow motion a 120 fps, e analizzato i video risultanti con *Tracker* (Figura 6). La misura cruciale per interpretare i risultati è quella della velocità della massa nel tratto finale della caduta, quando l'accelerazione, in presenza di campo magnetico, risulta nulla. Si possono utilizzare due approcci che forniscono risultati sostanzialmente equivalenti: fare una media della parte finale dei dati della curva velocità-tempo misurata (Figura 6 (B)) oppure interpolare l'intera serie di dati con una funzione esponenziale del tipo  $v_y = v_f(1 - e^{-kt})$  e considerare il parametro  $v_f$ . I due approcci danno risultati sostanzialmente equivalenti entro l'errore sperimentale.

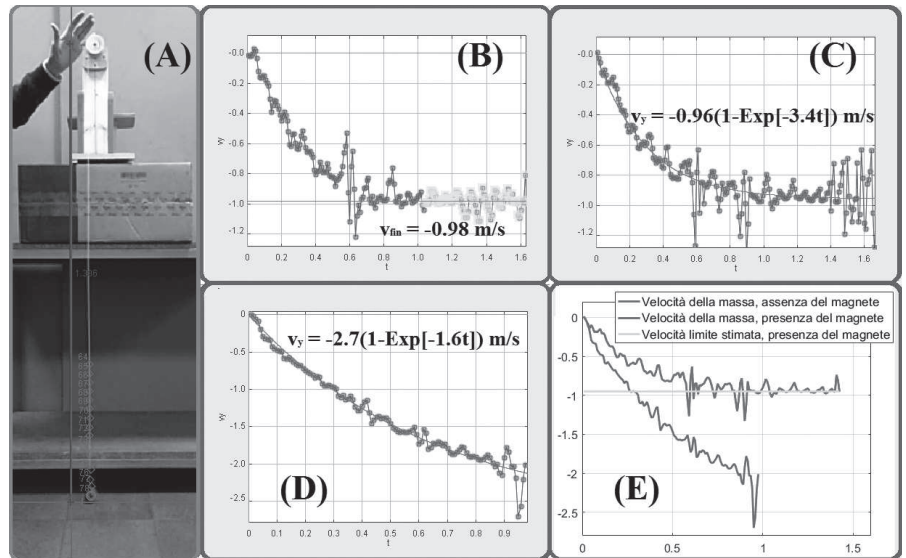


Figura 6. (A) Analisi *Tracker* dell'apparato sperimentale, (B) e (C) misura della velocità limite nel caso di assenza di campo magnetico per due esperimenti diversi, calcolata interpolando i dati finali con una costante (B) o l'intera serie di dati con un *fit* esponenziale (C). (D) L'andamento della velocità nel caso di assenza di campo magnetico e il suo *fit* esponenziale; (E) confronto degli andamenti delle due velocità (presenza e assenza di campo magnetico) sulla stessa scala. Da essa si vede che, alla velocità limite che viene raggiunta nell'esperimento in presenza di campo magnetico, la curva della velocità in assenza di campo magnetico potrebbe ancora abbastanza ragionevolmente essere approssimata con una retta, il cui coefficiente angolare è l'accelerazione media della massa. Notare che il momento d'inerzia dell'apparato con la nuova bobina,  $I = (1.03 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , è notevolmente maggiore di quello considerato nella sezione precedente, e quindi l'accelerazione iniziale risulta minore.

Mediando tre misure per la velocità limite in presenza di campo magnetico si ottiene il valore  $v_f = (0.097 \pm 0.03) \text{ m/s}$ .

Dalla velocità limite in presenza di campo magnetico si può stimare la f.e.m. ai capi della bobina quando la massa cade con velocità costante, che si ottiene sostituendo in Eq. (9)  $\dot{\vartheta} = v_f/r$  e  $\vartheta(t) = v_f t/r + \phi$  (dove  $\phi$  è un generico angolo di fase ignoto che non riveste alcuna importanza nella presente analisi):

$$\text{f.e.m.} = NAB \frac{v_f}{r} \sin\left(\frac{v_f t}{r} + \phi\right) \quad (12)$$

e quindi la potenza elettrica media dissipata:

$$P_{\text{el}} = \frac{1}{2R} \left(\frac{NABv_f}{r}\right)^2. \quad (13)$$

Procediamo con l'analisi utilizzando due modelli successivi. Inizialmente, considereremo il moto in assenza di campo magnetico come uniformemente accelerato. Successivamente, raffineremo il modello tenendo conto del fatto che, anche in assenza di campo magnetico, vi è una componente di attrito viscoso dovuto alla resistenza dell'aria (Fig. 6(D)).

Se trascuriamo la resistenza dell'aria e gli altri attriti presenti nell'apparato, le forze magnetiche sulla bobina dovrebbero esercitare una forza totale uguale ed opposta alla forza di gravità quando viene raggiunta la velocità limite, e quindi esprimere una potenza

$$P_{\text{mecc}} = mgv_f \quad (14)$$



che risulta numericamente pari a

$$P_{\text{mecc}} = (0.54 \pm 0.02) \text{ W.} \quad (15)$$

Per conoscere la potenza elettrica dissipata (Eq. (13)) occorre misurare o calcolare il valore della resistenza della bobina. La misura con un semplice tester fornisce il valore  $R = (1.0 \pm 0.2) \Omega$ , con un errore relativo molto grande dovuto al fatto che la resistenza in questione è confrontabile con quella dei cavi dello strumento. Sostituendo i valori numerici in Eq. (13) si ottiene

$$P_{\text{el}} = (0.4 \pm 0.2) \text{ W} \quad (16)$$

che è compatibile con il valore di Eq. (15), ma affetto da un errore relativo del 50%. Per ottenere un risultato con minore incertezza possiamo utilizzare il valore teorico della resistenza della bobina, calcolato dalla lunghezza  $l = (26.53 \pm 0.05) \text{ m}$  del filo utilizzato; dalla sua sezione media  $S = (3.8 \pm 0.1) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$  e dalla resistività a temperatura ambiente del rame (ricotto)  $\rho = (1.72 \pm 0.03) \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . In questo modo si ottiene

$$R_{\text{teo}} = \rho \cdot \frac{l}{S} = (1.20 \pm 0.05) \Omega. \quad (17)$$

Sostituendo questo nuovo valore in Eq. (13) si ottiene

$$P_{\text{el}} = (0.33 \pm 0.05) \text{ W.} \quad (18)$$

Che è diverso da quello ottenuto in Eq. (15) in modo statisticamente significativo, dimostrando che è necessaria un'analisi più accurata del bilancio energetico del sistema, in presenza e in assenza di campo magnetico. Infatti, la potenza elettrica nella spira non è l'unico meccanismo attraverso cui l'energia meccanica totale del sistema viene dissipata. Occorre tener conto della resistenza dell'aria e di altri attriti che derivano da forze di contatto nello srotolamento del filo, e dai cuscinetti a sfera. Rappresentiamo le forze di attrito presenti nel sistema mediante il seguente modello:

$$F_a = -F_0 - k_r v \quad (19)$$

Ossia come la somma di una forza costante (dovuta a forze di contatto, specialmente nello srotolamento del filo) e di una di attrito viscoso<sup>3</sup>. Nel termine di attrito viscoso incorporiamo sia la resistenza dell'aria, sia altri effetti della stessa forma matematica dovuti alle caratteristiche costruttive dell'apparato. È probabile, in realtà, che vi sia anche una dipendenza delle forze di contatto dalla tensione del filo; è molto difficile però distinguere sperimentalmente tale effetto dalla riduzione, rispetto a  $g$ , dell'accelerazione iniziale, dovuta solo al rapporto fra la massa stessa ed il momento di inerzia dell'apparato (Eq. (3)). Adottiamo quindi il modello di Eq. (19) e ci concentriamo sulla misura di  $F_0$ .

A tal fine procediamo come segue: costruito un piccolo contenitore di carta (del peso di circa  $1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ) appeso al filo completamente avvolto, aggiungiamo gradualmente piccole masse di riferimento (costituite da viti identiche, ciascuna del peso di  $7 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ) e misuriamo il numero di viti per il quale, effettuando diverse prove, l'apparato riesce a mettersi in moto o comunque, se avviato da una brevissima forza impulsiva, non si ferma ma procede poi a velocità approssimativamente costante. Tale numero risulta pari a  $2 \pm 1$ , fornendo un valore  $F_0 = (15 \pm 7) \cdot 10^{-3} \text{ N}$ .

Il raggiungimento della velocità limite  $v_f$  corrisponde ora, in base ad Eq. (19), alla condizione  $k_T v_f = mg - F_0$ . Stimando attraverso un *fit* esponenziale (Fig. 6(D)) la velocità limite raggiunta dalla massa in assenza del campo magnetico, essa risulta, mediando ancora su tre misure,  $v_{f,0} = (2.75 \pm 0.05) \text{ m/s}$ . Assumendo che il valore di  $k_T$  sia lo stesso nelle due condizioni (con e senza campo magnetico), si ottiene quindi  $k_T = \frac{mg - F_0}{v_{f,0}}$ . Perciò, nel caso in cui il campo magnetico sia presente si ha

$$\left( F_{\text{mag}} + \frac{mg - F_0}{v_{f,0}} v_f \right) v_f = (mg - F_0) v_f \quad (20)$$

che implica

$$F_{\text{mag}} v_f = (mg - F_0) v_f \left( 1 - \frac{v_f}{v_{f,0}} \right) = (0.34 \pm 0.04) \text{ W} \quad (21)$$

Eq. (21) risulta ottimamente compatibile con Eq. (18). Ignorando la resistenza dell'aria e gli altri attriti si sovrastima quindi la potenza elettrica necessaria a contrastare la gravità di circa il 30%. Bisogna notare che la gran parte della differenza tra il risultato di Eq. (15) e quello di Eq. (21) è data dall'inclusione in quest'ultima delle forze non magnetiche di attrito viscoso, mentre il contributo di  $F_0$  è molto piccolo.

L'analisi di Eqs. (19-21), sebbene algebricamente non difficile, è concettualmente piuttosto sofisticata. Rimane il fatto che l'effetto di freno magnetico è, visivamente, molto evidente; e che utilizzando il modello più semplice di moto uniformemente accelerato in caso di assenza di campo magnetico si ottengono comunque risultati del giusto ordine di grandezza.

Il lettore potrebbe a questo punto chiedersi come mai nel nostro apparato le forze di attrito viscoso siano così rilevanti. Secondo i dati a nostra disposizione, gioca un ruolo molto importante l'effetto "elica" della bobina. Infatti, da misure effettuate rimuovendo del tutto la bobina, e lasciando il solo perno girevole, si ottiene una velocità limite stimata molto più elevata, dell'ordine dei 6-7 m/s. Si noti comunque che nell'esperimento sull'induzione della sezione precedente, la bobina utilizzata è più stretta, e questo effetto appare essere di minore entità.<sup>4</sup>

## Far lampeggiare dei LED

Dalle misure della f.e.m prodotta dall'apparato a circuito aperto (Figg. 2 e 3) ci siamo resi conto che essa avrebbe potuto facilmente superare la tensione di soglia della maggior parte dei diodi LED incrementando la massa che viene lasciata cadere, ed avvicinando quindi la sua accelerazione durante la caduta a  $g$  in base all'Eq. (3). Abbiamo perciò sostituito la massa di 57 g con una da 400 g, e dopo aver verificato che la f.e.m. ottenuta fosse effettivamente sufficiente (si otteneva un valore di picco di quasi 3 V) abbiamo collegato due diodi LED di diverso colore, in parallelo ma con polarità opposta, come in Fig. 7(A). Abbiamo quindi effettuato l'esperimento, video registrando in questo caso i LED in slow motion a 120 fps (Figura 7 (B-C-D-E)).

Oltre a rinforzare l'idea che la f.e.m. prodotta dall'induzione magnetica è un effetto reale, che può essere concretamente utilizzato per trasformare energia da una forma ad un'altra, questa semplice esperienza può essere utilizzata per introdurre gli studenti ad alcune caratteristiche essenziali dei LED, dispositivi tecnologici che molti autori hanno considerato di centrale importanza per la didattica della fisica [6].

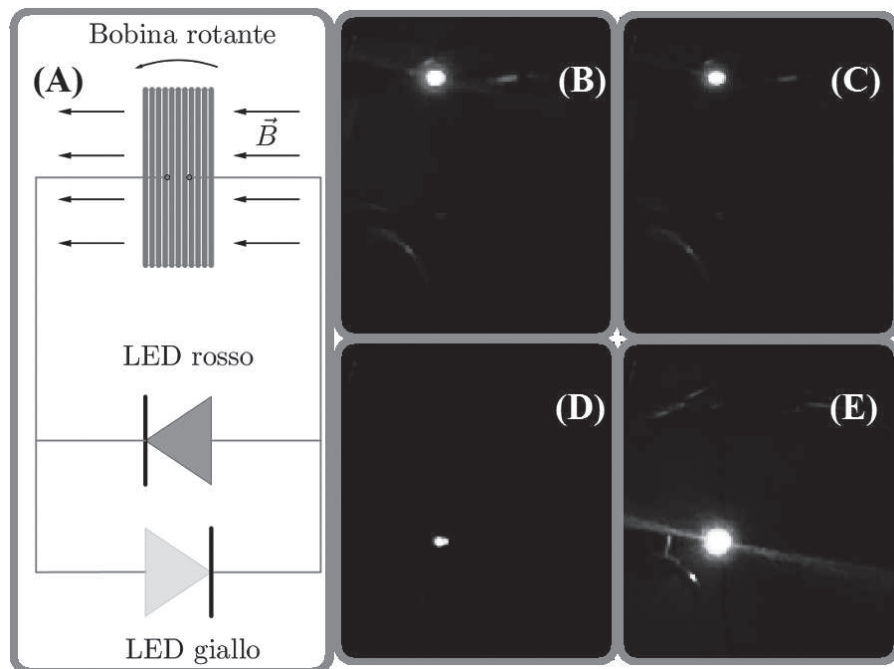


Figura 7. (A) Rappresentazione schematica dell'apparato utilizzato; (B), (C), (D), (E), fotogrammi successivi, a distanza di 8.33 ms (video a 120 fps) dell'accensione e spegnimento alternativo dei LED rosso e giallo.

## Conclusioni

In questo articolo abbiamo discusso la realizzazione pratica di un apparato sperimentale simile a quello descritto nel testo di una simulazione dell'Esame di Stato di Fisica per il Liceo Scientifico. È stato dimostrato come le caratteristiche fondamentali del problema proposto possano essere ritrovate, sia pure con alcune limitazioni, nell'esperimento reale; e sono state discusse altre applicazioni sperimentali dell'apparato, che toccano temi di grande rilevanza per la fisica del quinto anno del liceo scientifico. Gli esperimenti che coinvolgono tale apparato fanno parte delle attività proposte alle classi di studenti di quinta nell'ambito dei laboratori PLS del Dipartimento di Fisica – Università di Pavia. I video, le analisi con *Tracker* e *Capstone* e altri materiali relativi agli esperimenti discussi sono disponibili sul sito del gruppo di Didattica e Piano Lauree Scientifiche, in via di realizzazione all'indirizzo <http://www-5.unipv.it/dida-pls/>.

## Bibliografia

- [1] Simulazione di seconda prova di Fisica, disponibile al link <http://questionariolsosa.miur.carloanti.it/pdf/2016-2017/EsempioProva-Fisica1.pdf>
- [2] Documento UMI-CIIM sulla seconda prova di Fisica dell'Esame di Stato, <http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/UMI-CIIM-sullesame-di-stato.pdf>
- [3] Lettera dell'AIF sulla seconda prova di Fisica, [www.aif.it/ArchivioA/DOCUMENTI/Lettera\\_seconda\\_prova.pdf](http://www.aif.it/ArchivioA/DOCUMENTI/Lettera_seconda_prova.pdf)
- [4] Onorato, P., De Ambrosis, A. "How can magnetic forces do work? Investigating the problem with students", *Physics Education*, **48**(6), (2013), 766.
- [5] ONORATO, P., DE AMBROSIS, A. "Magnetic damping: Integrating experimental and theoretical analysis", *American Journal of Physics*, **80**(1), (2012), 27-35.
- [6] PLANINŠIČ, G., ETKINA, E. "Light-emitting diodes: A hidden treasure", *The Physics Teacher*, **52**(2), (2014), 94-99.

**Note**

<sup>1</sup> [NdR] Il Gruppo di lavoro AIF "Fisica seconda prova" ha preparato e pubblicato sul sito dell'Associazione (<http://www.aif.it/ArchivioA/bobina.pdf> – <http://www.aif.it/ArchivioA/Bertozzi.pdf>) una soluzione commentata ai due problemi di questo esempio di prova d'esame diffuso dal MIUR.

<sup>2</sup> Per misurare il momento di inerzia, abbiamo avvitato al rocchetto una piccola asta di legno di momento d'inerzia noto in modo da formare un pendolo, e ne abbiamo misurato il periodo.

<sup>3</sup> Nella Eq. (19)  $v$  è la velocità della massa che cade, ma con questo non si intende che tutte le forze di attrito viscoso abbiano origine da essa. Ciò che si intende è che la forza di attrito viscoso totale sia della forma  $F_v = k_T \omega r_{eff, v}$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare e è un qualche "raggio efficace" dell'apparato; noi la riparametrizziamo, per comodità, come  $F_v = -k_T v$ .

<sup>4</sup> Un'altra domanda che il lettore potrebbe porsi è se sia ancora lecito, per la bobina che abbiamo considerato in questo paragrafo, considerare la sola potenza dissipata per effetto Joule, e non si debba tener conto invece anche dell'energia accumulata nella bobina sotto forma di campo magnetico a causa della sua induttanza. Questo significa essenzialmente considerare la bobina cortocircuitata come un circuito  $R-L$  in serie. Da calcoli che non riportiamo, l'induttanza della bobina risulta essere dell'ordine di  $L \approx 3$  mH. Quando la velocità del peso è costante, la pulsazione della f.e.m. è dell'ordine di  $2\pi f = \frac{v_f}{r} \approx 43$  rad/s. La reattanza induttiva della bobina risulta quindi dell'ordine di  $Z_L = 2\pi f L \approx 0.13 \Omega$ , cioè poco più di un decimo della sua resistenza elettrica Eq. (16). Poiché l'impedenza totale di un circuito  $R-L$  serie vale  $Z_T = \sqrt{R^2 + Z_L^2}$  si otterrebbe  $Z_T \approx 1.21 \Omega$  che non cambia sostanzialmente il risultato di Eq. (17). È chiaro però che la bobina da noi utilizzata si trova ai limiti dell'approssimazione di circuito puramente resistivo; ad esempio raddoppiando il numero delle spire si otterrebbe un significativo effetto induttivo.

**EINSTEIN VS. BOHR**

Albert Einstein, who was in many ways the father of quantum mechanics, had a notorious love-hate relation with the subject. His debate with Niels Bohr - Bohr completely accepting quantum mechanics and Einstein deeply skeptical - are famous in history of science. It was generally accepted by most physicist that Bohr won and Einstein lost. My own feeling, I think shared by growing number of physicists, is that attitude does not justice to Einstein's views.

Both Bohr and Einstein were subtle men. Einstein tried very hard to show that quantum mechanics was inconsistent; Bohr, however, was always able to counter his arguments. But in his final attack Einstein pointed something so deep, so counterintuitive, so troubling, and yet so exciting, that at beginning of twenty-first century it returned to fascinate theoretical physicists. Bohr's only answer to Einstein's last great discovery - the discovery of entanglement - was to ignore it.

Leonard Susskind & Art Friedman, *Quantum Mechanics*, Basic Books 2014, p. XI