



Luigi Maria Gratton,

Vittorio Zanetti\*

Dipartimento di fisica,  
Università di Trento

\*Dipartimento di  
fisica, Università di  
Trento (attualmente in  
pensione)

# Riga da disegno usata come bilancia a pendolo

(Pervenuto il 10.7.2009, approvato il 26.11.2010)

## Appendice - Caratteristiche e risoluzione della bilancia ricavate teoricamente

Poiché abbiamo a disposizione la relazione teorica (2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(M+m)gD_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{M \left[ \frac{b^2+h^2}{12} + D_2^2 \right] + m \left[ x^2 + \frac{R^2+r^2}{2} \right]}{g(MD_2 + mx)}} \quad (2)$$

potremmo utilizzarla direttamente, dopo averla risolta rispetto a  $m$ , per determinare il valore di una massa incognita. Allo scopo, basterebbe misurare il periodo di oscillazione della riga caricata con la suddetta massa posta a una distanza  $x$  misurata, poiché tutte le altre quantità che entrano nella (2) sono note. Dal nostro punto di vista, però, è più interessante seguire il filo logico della parte iniziale studiando il comportamento del sistema riga-dado mediante le curve caratteristiche analoghe a quelle di Figura 4.

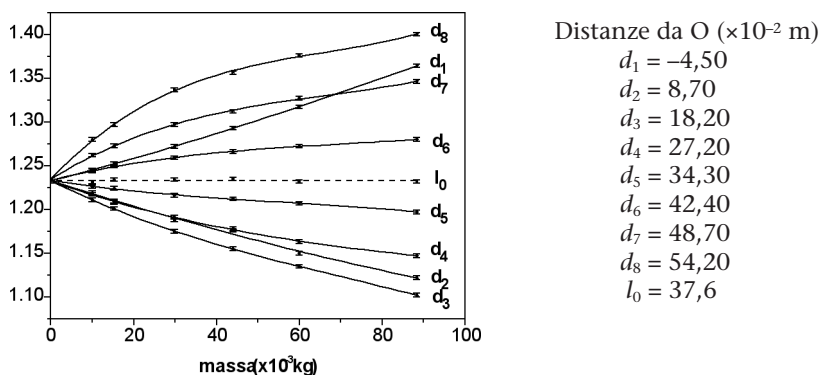


Figura 4 - Andamento del periodo del pendolo in funzione della massa fissata alla riga, al variare della distanza da O. Anche in questo caso è stata usata una cubica come funzione interpolante i punti sperimentali, tranne che nel caso della linea tratteggiata che corrisponde alla lunghezza ridotta del pendolo  $l_0$ .

Invece delle cubiche interpolanti, useremo la relazione rigorosa  $m(T)$ , ricavabile direttamente dalla (2). La nostra bilancia risulterà tarata più accuratamente e per giunta, disponendo della funzione matematica rigorosa, potremo trattare in maniera quantitativa altri aspetti, ad esempio il grado di risoluzione della bilancia.

Volendo procedere per questa strada ci dobbiamo rendere conto che tutte le curve di Figura 4 devono essere tracciate basandosi su valori che mediano le dimensioni dei singoli dadi, poiché ognuno di essi è geometricamente diverso dagli altri. Infatti il legame fra  $T$  e  $m$  dato dalla relazione (2) dipende dal valore delle costanti che vi compaiono, quindi occorre far riferimento a valori medi delle dimensioni dei dadi affinché esista un'unica relazione (2) in grado di descrivere

il comportamento dei singoli dadi posti uno alla volta alla stessa distanza da O. In altre parole, per poter procedere nell'analisi è opportuno fare un'approssimazione che fisicamente significa considerare i dadi tutti uguali come dimensioni geometriche ma diversi come densità, cosa questa di difficile realizzazione pratica: ma se proprio volessimo, potremmo realizzarla ricorrendo all'accorgimento di mantenere uguali le dimensioni che interessano, vale a dire il raggio esterno e il raggio interno, mentre si potrebbe cambiare il loro spessore visto che questa caratteristica geometrica dei dadi non entra nella relazione (2). O meglio, si potrebbe "impilare" un certo numero di dadi o di rondelle, incollandoli uno sull'altro, e poi fissare la pila sulla riga alla distanza  $x$  voluta. Facciamo notare tuttavia che il ricorrere a un dado medio fittizio, nei calcoli, è sostanzialmente corretto poiché gli errori sperimentali, sia sul periodo di oscillazione sia sulla posizione, sono maggiori di quelli che si introducono con tale approssimazione. Un'indicazione in tal senso si ricava dalla dispersione delle intercette riportate nelle Figure 6a e 6b.

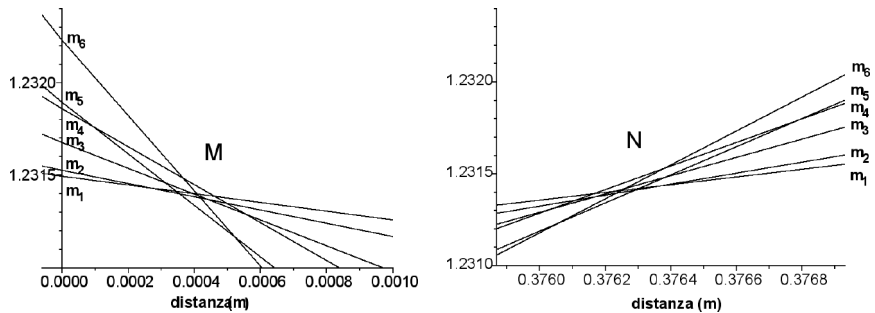


Figura 6. Ingrandimento delle due zone di intersezione delle curve espresse dalla relazione (2). La figura 6(a) si riferisce alla zona corrispondente al punto M, mentre la figura 6(b) si riferisce alla zona corrispondente al punto N. Le curve sono state calcolate utilizzando per i singoli dadi il valore medio del parametro  $\delta$ .

Sotto questa ipotesi abbiamo tracciato le curve di Figura 7 che, sebbene non derivino da un best fit dei dati, ci permettono ugualmente di fare alcune importanti considerazioni.

In primo luogo, al crescere della massa queste curve tendono ad un valore finito del periodo di oscillazione (tranne la curva  $d_1$  corrispondente a  $x = -4,50 \times 10^{-2}$  m per la quale il periodo tende all'infinito). Questo corrisponde al fatto che al crescere della massa del dado diviene sempre più trascurabile la massa della riga, perciò il sistema tende a comportarsi come un pendolo "semplice". Si comprende quindi che per distanze maggiori della lunghezza ridotta, più lontano viene posto il dado, più grande risulterà il periodo. Al contrario, per distanze comprese tra la lunghezza ridotta e zero, il periodo limite diminuisce al diminuire della distanza del dado da O. Infine, per distanze negative, ad esempio per  $x = -4,50 \times 10^{-2}$  m ( $d_1$  in Figura 7), il periodo cresce al crescere della massa e per un certo valore diviene infinito. Ciò corrisponde alla situazione in cui la riga è in equilibrio indifferente, che si verifica quando i momenti della forza peso della riga e del dado sono uguali e di segno opposto. Per massa maggiore e posizione negativa, il sistema in esame cambia completamente poiché la riga si capovolge. Tutte le curve della Figura 7 si intersecano nel punto  $m = 0$  e  $T_0 = 1,231$  s che rappresenta il periodo teorico della riga scarica e risulta uguale a quello misurato direttamente entro gli errori sperimentali.

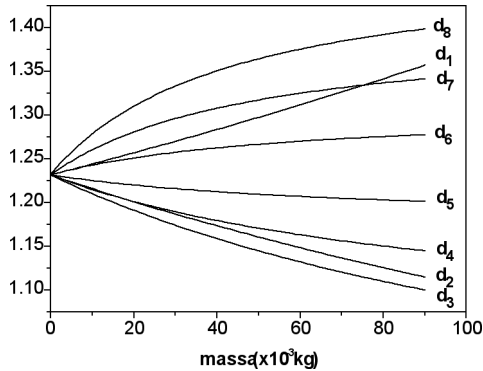


Figura 7. Andamento teorico del periodo del pendolo in funzione della massa per le varie posizioni dei dadi prese in considerazione nel presente lavoro. Le curve sono state calcolate utilizzando le dimensioni di un dado medio fittizio avente come raggio esterno la media dei raggi esterni e come raggio interno la media dei raggi interni.

Nella Figura 7 la curva  $d_2$  (corrispondente alla posizione del dado a  $8,70 \times 10^{-2}$  m) sta sopra la curva  $d_3$  (corrispondente alla posizione del dado a  $18,20 \times 10^{-2}$  m) per tutta la parte riportata. Ciò potrebbe apparire strano in quanto al crescere della massa del dado c'è da aspettarsi che il periodo della riga carica tenda ad un valore finito: quello di un pendolo "semplice". Il periodo di un pendolo lungo  $8,70 \times 10^{-2}$  m deve pertanto essere più breve di quello lungo  $18,20 \times 10^{-2}$  m. Questa apparente anomalia sparirebbe se il grafico riportasse anche masse maggiori per il dado; infatti le due curve si incrociano a  $m = 0,175$  kg come si ricava risolvendo un sistema tra due relazioni ottenute a partire dalla relazione (2) nelle quali sia stata lasciata come incognita la massa (il sistema ammette sempre la soluzione banale per  $m = 0$  kg). In realtà se si osserva attentamente la Figura 7 si nota che anche la curva  $d_4$  incrocia la  $d_2$  per un valore attorno a  $0,02$  kg.

Occupiamoci ora del nostro sistema usato come bilancia per avere un'idea della sua risoluzione in massa. Allo scopo ci basiamo sull'incertezza percentuale del valore di una massa determinato mediante interpolazione grafica su una delle curve di Figura 7. La risoluzione, nell'ipotesi di poter trascurare le diverse dimensioni dei dadi, dipende dall'incertezza con cui conosciamo la posizione e da quella sulla determinazione del periodo. Consideriamo solo quest'ultima, sia perché è più rilevante di quella sulla posizione, sia per avere risultati confrontabili con quanto ricavato nella Sezione 5 quando abbiamo trascurato l'incertezza sulla posizione. Ci aspettiamo che l'incertezza sia dello stesso ordine di quella valutata sperimentalmente attraverso l'interpolazione effettuata sulla analoga curva e riportata nella Tabella 3.

Osservando le curve  $T(m)$  di Figura 7 si intuisce che la risoluzione è maggiore dove la pendenza delle curve è massima, come è già stato detto a proposito della Figura 4. Analiticamente, possiamo scrivere:

$$\Delta m = \left| \frac{\partial m}{\partial T} \right| \Delta T. \quad (4)$$

In questa relazione  $\Delta m$  è l'errore assoluto sulla massa (quindi, da un altro punto di vista, rappresenta la più piccola massa che possiamo determinare, cioè la risoluzione della bilancia),  $\Delta T$  l'incertezza sul periodo che nel nostro caso vale quasi sempre  $0,002$  s, mentre l'altro termine rappresenta il modulo della derivata della funzione  $m(T)$ , cioè la pendenza locale della curva. I risultati che si ottengono applicando la (4) alle curve di Figura 7 sono riportati in Figura 8(a).

Si noti che l'errore assoluto dipende fortemente dal valore del periodo. Le curve a destra del periodo proprio della riga  $T_0$ , si riferiscono a distanze maggiori della lunghezza ridotta e alla zona corrispondente alla posizione negativa del dado

sulla riga: in questo settore i periodi aumentano al crescere della massa. I valori a sinistra corrispondono a distanze comprese tra la lunghezza ridotta e il vincolo: in questo settore i periodi diminuiscono al crescere della massa. In ogni caso gli errori assoluti sono notevoli anche senza tener conto dell'influenza dell'errore sulla posizione, pertanto la risoluzione della bilancia è sempre scarsa.

Infine calcoliamo l'errore percentuale perché quasi sempre questo offre un'idea della precisione che si può ottenere da uno strumento migliore di quanto ci può suggerire l'errore assoluto. Ovviamente per determinare le curve di Figura 8(b) ci siamo serviti della relazione

$$err\% = \frac{\Delta m}{m} \times 100\% . \quad (5)$$

Dall'andamento delle curve ivi rappresentate si possono individuare le zone in cui la bilancia offre la migliore precisione, zone che però non corrispondono

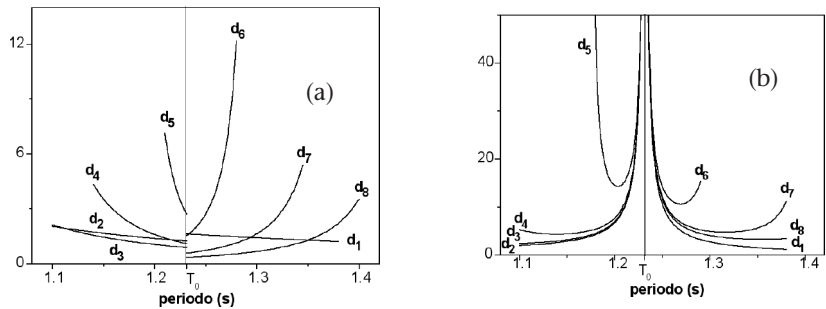


Figura 8. Andamento teorico dell'errore al variare del periodo, assoluto in figura (a) e percentuale in figura (b), per i valori di massa ottenuti utilizzando il pendolo tarato come bilancia. Le linee verticali corrispondono al periodo proprio della riga  $T_0$ .

alla massima risoluzione tranne che per le posizioni negative. Ciò fa comprendere perché nella Tabella 3 alla risoluzione migliore (errore assoluto minore) non corrisponde la precisione maggiore (errore percentuale minore).