



Simone Zanotto

Consiglio Nazionale
delle Ricerche – Istituto
Nazionale di Ottica
Sesto Fiorentino (FI)
simone.zanotto@alumni.sns.it;
simone.zanotto@ino.it

Molle ferme e molle in vibrazione: qualche sperimentazione su elasticità e risonanza

(Pervenuto il 7.7.2015, approvato il 22.10.2015)

ABSTRACT

This article reports about some experiments on the physics of resonance and elasticity. Employing a simple setup it is possible to identify the longitudinal eigenmodes of a stretched massive spring and to study their behaviour under the conditions of forced and damped motion. Moreover, an interesting scale law concerning springs of different sizes is analyzed.

Introduzione

In questo articolo vorrei proporre alcuni esperimenti riguardo la fisica dell'elasticità e della risonanza, realizzati mediante un apparato autocostruito a partire da materiali che per la maggior parte sono di comune reperibilità. Questi esperimenti sono stati impiegati come test finale nella settimana di preparazione alle *Olimpiadi Internazionali della Fisica*, tenuta a Trieste nel maggio 2013, e come esercitazione durante il "campeggio" estivo di Sigillo (PG) tenuto nell'agosto 2013.

La prima parte riguarda le onde longitudinali in una molla tesa, che vengono studiate sia sotto l'azione di un'eccitazione continua (oscillazioni forzate), sia in assenza di eccitazione (oscillazioni smorzate). Nella seconda parte si userà lo stesso apparato sperimentale per analizzare il collegamento fra l'elasticità torsionale di un filo e il comportamento di molle di diverso diametro, con l'osservazione di un'interessante legge di scala.

Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è mostrato in Figura 1. Esso consiste in un supporto di legno, sopra al quale è appoggiato un altoparlante alla cui membrana è stato incollato un piccolo gancio. A questo gancio è appesa una molla, che viene mantenuta tesa grazie a un supporto metallico scorrevole che si può fissare all'altezza desiderata sulle barre verticali del supporto. L'altoparlante è un comune dispositivo USB connesso ad un PC portatile, su cui è installato un software generatore di segnali [1]. La molla è forse l'elemento più "delicato" dell'apparato, nel senso che non è facile trovare una molla con le caratteristiche desiderate. Dopo alcune ricerche la soluzione adottata è stata quella di farsi realizzare da un piccolo produttore una serie di molle da trazione in acciaio armonico aventi

diametro del filo 0,4 mm, diametro delle spire 7,75 mm, e lunghezza 57 mm. Anche gli altoparlanti devono soddisfare un'esigenza specifica, cioè quella di rispondere sufficientemente bene alle frequenze basse, cosa non riscontrata in tutti i dispositivi commerciali. Purtroppo il prodotto su cui era ricaduta la scelta non è più disponibile; tuttavia con un minimo di ricerca si dovrebbe trovare facilmente un sostituto adeguato.

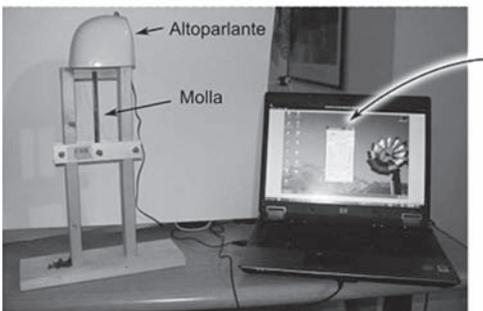


Figura 1. Foto dell'apparato sperimentale.

I modi longitudinali

Accendendo il generatore di segnali, la membrana si mette in vibrazione alla frequenza selezionata con la forma d'onda desiderata (sinusoidale, triangolare o quadrata). Le prove riportate in questo articolo sono state condotte tutte con eccitazione sinusoidale; tuttavia si possono pensare delle prove specifiche per analizzare la risposta del sistema ad altre forme d'onda (introducendo quindi i concetti di serie di Fourier etc.). Variando la frequenza di eccitazione a partire da una decina di hertz in su, si nota che la molla vibra leggermente, ma quasi sempre con un'ampiezza molto limitata, tanto che si fatica a distinguere la presenza di oscillazioni. Avendo evidenziato la spira centrale con un tocco di vernice, quello che si osserva sarà simile a quanto riportato in Figura 2 (a). Se però si scorre la frequenza di eccitazione in modo sufficientemente fine, si noterà che, in corrispondenza di alcune frequenze, la spira centrale oscilla vigorosamente, fino a raggiungere ampiezze di qualche centimetro, come riportato in Figura 2 (b). Sarà anzi bene limitare l'insorgere di oscillazioni troppo ampie che possono danneggiare l'apparato (o indurre fenomeni non lineari, altra possibilità di studio ...), semplicemente controllando il volume dell'altoparlante.

Oltre alle frequenze per cui si osserva una vibrazione ampia della spira centrale (modi con un numero dispari di ventri) si possono anche notare i modi pari, sebbene essi siano riconoscibili con un po' più di difficoltà. Per la molla che abbiamo impiegato, la frequenza del primo modo (un ventre al centro) è risultata essere di circa 16,8 Hz, e le successive sono state osservate a multipli interi della fondamentale. Questo è coerente con la consueta formula

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad (1)$$

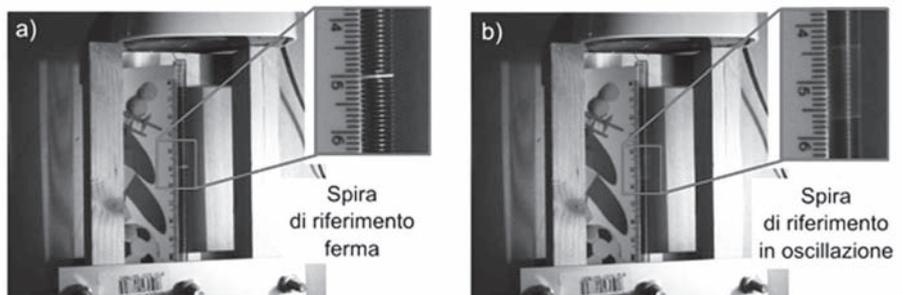
dove n è il numero di ventri, c è la velocità di propagazione dell'onda longitudinale, ed L è la lunghezza della molla *in tensione* [2].

Un'interessante prova sperimentale consiste nel misurare le frequenze f_n applicando alla molla tensioni più o meno forti, ossia per diversi valori L della lunghezza totale della molla tesa. Se non si esagera né in eccesso né in difetto con la tensione (valori sensati sono quelli per cui la lunghezza della molla tesa sta fra 1,5 e 2,5 volte la lunghezza della molla a riposo), si tornerà ad osservare *la stessa* serie di frequenze osservate precedentemente. Questo ci dà un'importante informazione sulla dipendenza di c da L : deve infatti essere che c dipende linearmente da L . Infatti si dà il caso che una molla tesa supporti la propagazione di onde longitudinali con velocità

$$c = \sqrt{\frac{k}{M}} L \quad (2)$$

dove k è la costante elastica della molla, M la sua massa e L la sua lunghezza in tensione. Questa relazione non è immediata da dimostrare. Una strada consiste

Figura 2. Molla ferma o eccitata da una frequenza non risonante (a); molla eccitata da una frequenza risonante (b).



nel modellizzare la molla come una serie di molle microscopiche prive di massa che collegano una serie di masse, tali per cui la costante elastica globale e la massa globale siano quelle della molla reale. Con un po' di algebra si passa quindi all'equazione delle onde e si identifica la velocità di propagazione c nella forma data sopra. Da notare che da questa trattazione si osservano parecchie analogie con i modelli atomici delle vibrazioni reticolari [3]. Tornando all'esperienza, si può infine verificare che le formule (1) e (2) permettono di prevedere la costante elastica della molla, essendo nota la frequenza del modo fondamentale e la massa della molla. Nel nostro caso $M = (3,25 \pm 0,02)$ g, da cui, trascurando l'errore sulla misura della frequenza, risulta $k = (3,67 \pm 0,02)$ N/m. Una misura di k effettuata indipendentemente mediante il consueto metodo statico (cioè mediante l'analisi dell'elongazione sotto l'effetto di una forza applicata) ha invece dato come risultato $k_{statico} = (3,52 \pm 0,09)$ N/m. Questi due valori, sebbene non compatibili, sono piuttosto vicini e mostrano come sia possibile misurare in maniera alternativa la costante elastica di una molla.

La curva di risonanza

Nella misura discussa sopra si è trascurato l'errore sulla frequenza di risonanza. Una domanda molto interessante è *come si attribuisce un errore a questa misura*. A prima vista si potrebbe usare la risoluzione in frequenza del generatore di funzioni, che, peraltro, non è immediata da determinare, dipendendo essa da dettagli non banali di implementazione software e hardware. Tuttavia, uno sperimentatore attento forse tornerà alla *procedura* di misura della frequenza di risonanza, e noterà che, per come è stata indicata sopra, essa è mal posta o comunque parziale. Cosa vuol dire infatti *misurare la frequenza di risonanza*? Non possiamo accontentarci di affermare che "in corrispondenza della risonanza la molla vibra molto"; questa è un'espressione un po' troppo qualitativa. Volendo indagare più in dettaglio si potrà provare a variare finemente la frequenza di eccitazione intorno a quella che era stata identificata come frequenza di risonanza, misurando, per esempio, l'ampiezza delle oscillazioni della spira centrale della molla. Il grafico in Figura 3 è stato ottenuto con questa procedura. Si può notare come l'ampiezza passi da 2 mm per una frequenza di 16,60 Hz fino a 24 mm per una frequenza di 16,79 Hz, descrivendo una curva a picco che sappiamo essere approssimativamente *Lorentziana* quando la dissipazione è piccola [4].

L'osservazione della curva di risonanza con questo semplice metodo è a mio avviso molto significativa e meriterebbe attenzione in un laboratorio didattico, sicuramente a livello dei primi anni di università ma anche a livello di scuola secondaria. È infatti superfluo osservare che la risonanza è un fenomeno onnipresente tanto nei vari campi della fisica quanto in numerosi oggetti e dispositivi cui siamo a contatto nella vita quotidiana; a seconda della preparazione degli studenti si potrà affrontare l'argomento da diversi punti di vista e con più o meno formalismo matematico.

Tornando alla domanda riguardo l'errore sulla misura della frequenza di risonanza, a questo punto qualcuno potrebbe essere portato a collegare detto errore con la *larghezza della curva di risonanza*. È difficile confutare questa osservazione – falsa – senza gli opportuni strumenti teorici riguardo la dinamica dell'oscillatore forza-

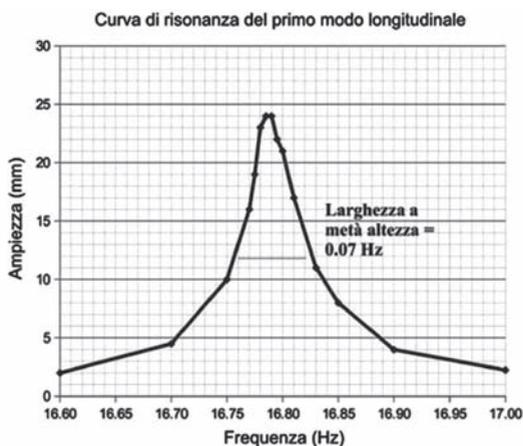


Figura 3. Curva di risonanza per l'ampiezza del primo modo longitudinale della molla tesa.

to. Sono infatti *il modello fisico* (e la matematica ...) che ci danno informazioni su cosa voglia dire "frequenza di risonanza". Preso per buono che la curva di risonanza abbia una certa forma, dovremmo confrontare la curva misurata con quella teorica, e vedere se i dati sperimentali sono compatibili con il modello. Per fare questo avremmo bisogno di un po' di concetti di statistica; tuttavia, non vorrei dilungarmi su questo aspetto e punterei l'attenzione su un'analisi più qualitativa. Assumiamo che l'errore sulle frequenze e sulle ampiezze sia trascurabile (cioè confrontabile con le dimensioni dei punti). Assumiamo anche che i punti stiano effettivamente intorno ad una *Lorentziana*; le piccole deviazioni (irregolarità della curva) sono attribuibili a fonti d'errore di natura casuale. A questo punto possiamo dire con un buon grado di confidenza che la frequenza centrale della curva (cioè quella che con qualche approssimazione possiamo chiamare frequenza di risonanza) sia pari a $(16,79 \pm 0,01)$ Hz. Chiaramente non possiamo attribuire un valore statistico preciso a questa incertezza, ma ritengo che questo genere di stime abbia una significativa valenza didattica in quanto permette di focalizzarsi sui concetti piuttosto che sulle procedure.

Le oscillazioni smorzate

Vogliamo ora studiare cosa succede alla molla in risonanza se interrompiamo l'eccitazione esterna applicata mediante l'altoparlante. A partire dall'istante dell'interruzione, si nota che l'oscillazione si riduce progressivamente di ampiezza fino a non essere più misurabile nel giro di una decina di secondi. Trattandosi di un fenomeno rapido, la misura richiede un minimo di perizia; tuttavia, con un po' di allenamento riteniamo che si possa ottenere un risultato soddisfacente. Noi abbiamo avviato un cronometro contemporaneamente all'interruzione dello stimolo sull'altoparlante, per poi arrestarlo quando le oscillazioni raggiungevano una data ampiezza. Con questi dati, conoscendo la fisica delle oscillazioni smorzate si è subito tentati dal realizzare un grafico in scala semilogaritmica: detta A_0 l'ampiezza iniziale e $A(t)$ l'ampiezza all'istante t , il risultato ottenuto è quello riportato in Figura 4. Tenendo conto dell'errore sulle ampiezze, l'andamento dei punti sperimentali è chiaramente compatibile con la legge di decadimento esponenziale $A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = 8,6$ s.

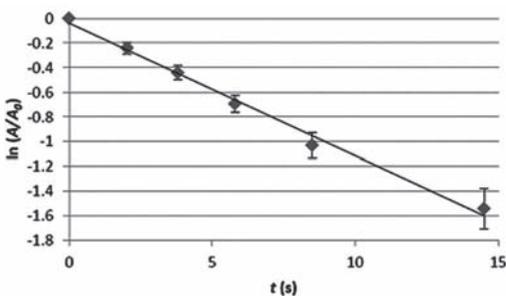


Figura 4. Curva di decadimento della molla, dopo lo spegnimento dell'eccitazione risonante avvenuto al tempo $t = 0$ s.

Un'interessante legge di scala

In quest'ultima parte dell'articolo vorrei focalizzare l'attenzione su una proprietà delle molle a spirale che ha significative implicazioni tecnologiche. Vogliamo capire come si comportano molle aventi diverso diametro realizzate a partire dal medesimo filo di acciaio. Forse non tutti sarebbero disposti a scommettere quello che si osserva immediatamente provando ad estendere queste molle: le molle più grandi (cioè, quelle con le spire

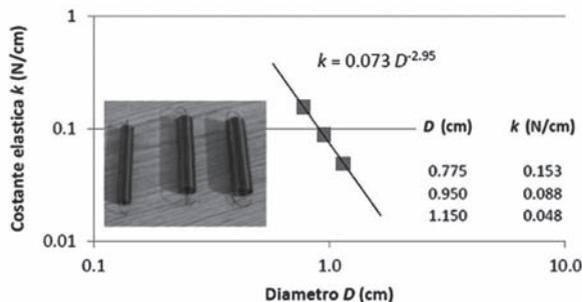
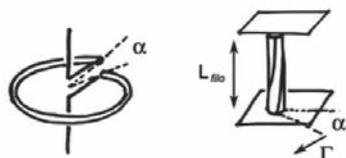


Figura 5. Dipendenza della costante elastica dal diametro di 3 molle, a parità di tipo di filo impiegato per realizzare le molle e al variare del diametro delle spire.

Figura 6. Schemi per la deduzione della legge che lega la costante elastica della molla al diametro delle spire (vedi testo).



Il comportamento di una molla si può infatti schematizzare come in Figura 6. Quando una spira viene estesa, il filo che la costituisce è sottoposto ad una torsione il cui angolo α è dettato dalla “apertura” della spira stessa. Questa apertura, a sua volta, è connessa con il diametro della spira semplicemente da $\alpha \approx 2\Delta L/ND$, essendo ΔL l’elongazione della molla, N il suo numero di spire e D il diametro della spira. La reazione di un filo rigido alla torsione si può descrivere secondo la formula $\Gamma = B\alpha/L_{\text{filo}}$, essendo Γ la coppia di torsione, L_{filo} la lunghezza del filo, e B una costante che dipende dal modulo di rigidità del materiale di cui è costituito il filo. Pertanto, dato che la coppia esercitata sul filo in conseguenza dell’applicazione di una forza F sulla molla è $\Gamma = FD/2$, si ottiene infine $k = F/\Delta L = 4B/\pi ND^3$. La dipendenza cubica denuncia che basta una piccola variazione del diametro della molla per ottenere valori della costante elastica molto diversi. A questo punto ci si potrebbe chiedere perché, per esempio, le molle delle sospensioni dei treni siano di diametro ben maggiore rispetto – per esempio – alle molle che si trovano nelle penne a sfera, sebbene le prime debbano essere ben più “dure” rispetto alle seconde! Lascio ai lettori l’analisi del problema, sperando che ne possano nascere spunti di discussione. In sostanza, anche un dispositivo apparentemente semplice come la molla riserva alcune sorprese che nascondono molta fisica e che possono essere esplorate semplicemente in un laboratorio didattico.

Conclusioni

In questo articolo sono stati presentati alcuni esperimenti sull’elasticità, sia dal punto di vista dinamico sia da quello statico. Data l’onnipresenza dei fenomeni elastici ed oscillatori nei vari domini della fisica, i concetti analizzati mediante gli esperimenti proposti nella prima parte possono essere esportati fruttuosamente nell’ottica, nell’elettromagnetismo etc., con il vantaggio che le scale di tempo e di dimensioni qui coinvolte favoriscono l’analisi e l’interiorizzazione del fenomeno. La seconda parte invece può dare spunti per considerazioni di tipo applicativo riguardo un oggetto tecnico di fondamentale importanza quale la molla.

più larghe) necessitano di meno forza per essere estese. La domanda è ovviamente *quanto* diminuisce la costante elastica al crescere del diametro. Per questa misura ci siamo fatti realizzare altri tre esemplari di molle, aventi diametro delle spire pari a 7,75 mm, 9,50 mm e 11,50 mm, e diametro del filo pari a 0,5 mm. Le molle erano tutte lunghe 48 mm. La costante elastica di ciascuna molla è stata misurata convenzionalmente, applicando delle forze calibrate alla molla. Il risultato è riportato nel grafico di Figura 5, e i dati sono tabulati a margine del grafico stesso. Sapendo già dove andare a parare, abbiamo adottato una scala bilogarithmica e, in questo modo, i punti sperimentali sono risultati giacere con ottima approssimazione su una retta. L’esponente della legge di potenza è risultato molto vicino a 3, che, come vedremo, è il risultato atteso sulla base di un semplice modello dell’elasticità della molla.

Note e Bibliografia

- [1] <http://www.dr-jordan-design.de/signalgen.htm>
- [2] Nella configurazione adottata si può assumere che la molla sia vincolata ad entrambi gli estremi; dal lato dell'altoparlante questa è chiaramente un'approssimazione, che tuttavia risulta molto buona in quanto l'ampiezza di oscillazione dell'altoparlante è molto minore dell'ampiezza di oscillazione della molla, almeno quando quest'ultima si trova vicino ad una frequenza di risonanza.
- [3] AA.VV., *Berkeley Physics Course*, vol. 3, cap. 2, par. 4. (ed. McGraw-Hill)
- [4] AA.VV., *Berkeley Physics Course*, vol. 3, cap. 3, (ed. McGraw-Hill); R. P. Feynman, *La fisica di Feynman*, vol. 1, cap. 23 (ed. Zanichelli)

Attendo con impazienza, quasi avidamente, l'arrivo settimanale di riviste come "Nature" e "Scienze", e vado subito agli articoli sulle scienze fisiche – non, come forse dovrei, agli articoli di biologia e di medicina. Furono le scienze fisiche le prime a stregarmi, da ragazzo. [...]

Qualche settimana fa, in campagna, lontano dalle luci della città, ho visto il cielo intero «spolverato di stelle» (per dirla con Milton); un cielo come questo, pensavo, si può vedere solo su altipiani elevati e desertici, come quello di Atacama in Cile. Questo splendore celeste mi ha fatto improvvisamente capire quanto poco tempo, quanta poca vita, mi siano rimasti. La mia percezione della bellezza del paradiso, dell'eternità, era per me inseparabilmente mescolata con un senso di transitorietà – e di morte. Ho detto ai miei amici, Kate e Allen: «Mi piacerebbe vedere di nuovo un cielo come questo mentre muoio». «Ti porteremo fuori con la sedia a rotelle», mi hanno risposto.

Da quando, a febbraio, scrissi di avere un tumore metastatico, sono stato confortato dalle centinaia di lettere che ho ricevuto, dalle espressioni di affetto e di apprezzamento, e dalla sensazione che forse ho vissuto una vita bella e utile. Tutto questo mi riempie di gioia e di gratitudine – ma nulla mi ha colpito tanto quanto quel cielo notturno pieno di stelle.

Fin da piccolo ho avuto la tendenza ad affrontare le perdite – la scomparsa di persone a me care – rivolgendomi al non umano. Quando mi mandarono in collegio all'età di sei anni, all'inizio della Seconda guerra mondiale, i numeri diventarono i miei amici; quando tornai a Londra, a dieci anni, gli elementi e la tavola periodica divennero i miei compagni. Per tutta la vita, i momenti di stress mi hanno portato ad avvicinarmi alle scienze fisiche, un mondo dove non c'è vita, ma dove non c'è nemmeno morte.

E ora, in questo frangente, in cui la morte non è più un concetto astratto, ma una presenza – una presenza fin troppo vicina e a cui non puoi dire di no – mi sto di nuovo circondando, come feci quando ero ragazzo, di metalli e minerali, piccoli emblemi di eternità. Ad un estremo della mia scrivania, ho l'elemento 81 in una bella scatola, speditomi dall'Inghilterra dai miei amici appassionati di elementi: c'è scritto «Buon compleanno al tallio» ed è un ricordo del mio 81esimo compleanno, nel luglio scorso; poi, c'è un settore dedicato al piombo, l'elemento 82, per il mio 82esimo compleanno, celebrato all'inizio di questo mese. Sempre qui, c'è un cofanetto di piombo, che contiene l'elemento 90, il torio, un torio cristallino, bello come i diamanti, e, naturalmente, radioattivo – da cui il cofanetto di piombo.

OLIVER SACKS, *I miei ultimi anni tra il piombo e il berillio*, La Repubblica, 13 agosto 2015