Giuseppe Fera
Liceo Scientifico Statale "G. B. Quadri", Vicenza

Il profilo della Torre Eiffel

(Pervenuto il 14.1.2008, approvato il 30.5.2008)

ABSTRACT
Starting with a short story by Dino Buzzati, the article explains how some features of the Eiffel Tower relate to simple physics: e.g. due to its distinctive shape, its weight balances the torque produced by the pressure of the wind.

Quando lavoravo alla costruzione della Torre Eiffel, quelli sì erano tempi. E non sapevo di essere felice. Così lo scrittore Dino Buzzati [1] inizia un racconto riportato nella raccolta *Il colombre*. Oggi il nome di Buzzati (1906-1972) viene associato al suo maggior successo, *Il deserto dei tartari*, romanzo del 1939, e pochi affrontano la lettura dei suoi numerosi racconti brevi. Tra essi, *La Torre Eiffel*, offre lo spunto per qualche riflessione sulla progettazione della celebre costruzione. Ma vediamo cosa narra Buzzati: siamo alla fine dell'800, il protagonista è un operaio che viene ingaggiato dall'ingegner Eiffel. *Un'asta sopra l'altra, un ferro sopra un altro ferro, una putrella sopra una putrella, e bulloni bulloni, e strepito di martelli...* La costruzione prosegue oltre i limiti stabiliti: *Così, a quota trecento, anziché abbozzare l'intelaiatura della cuspide, si innalzarono nuove travi d'acciaio*[1] *una sull'altra in direzione dello zenit.* [...] *Fu in quel periodo che si cominciò a intuire la meravigliosa verità* [...] *che la costruzione della Torre Eiffel non sarebbe terminata mai, ora si capiva perché l'ingegnere avesse voluto quel sesquipedale piedistallo, quelle quattro ciclopiche zampe di ferro che sembravano assolutamente esagerate*. Buzzati è un maestro nello stravolgere un quadro quanto mai prosaico introducendo temi a lui cari: il mistero, la ricerca dell'assoluto, l'ansia dello straordinario, la disillusione che fatalmente attende i suoi personaggi. L'ordine viene ristabilito, come sempre accade, dall'intervento dell'esercito: *Disfecero il poema da noi elevato al cielo, amputarono la guglia a trecento metri d'altezza, ci piantarono sopra il cappelluccio che ancora adesso vedete, miserabile* e il racconto chiude sul rimpianto degli operai presenti all'inaugurazione del monumento.

La lettura suscita certamente emozioni ma pure qualche domanda: sarebbe possibile costruire una torre di altezza illimitata? Il profilo della Torre Eiffel è descritto da una curva esponenziale, come pare a prima vista? Quali elementi sono stati considerati nella progettazione della Torre Eiffel?

Partiamo dalla prima domanda. Dalla narrazione di Buzzati non risulta come varia in dipendenza della quota la superficie della sezione orizzontale della costruzione; nella narrazione gli operai, per evitare lunghi tragitti di discesa e di risalita, da un certo momento in poi, restavano a dormire sul culmine della costruzione, che doveva essere una piattaforma sufficientemente ampia da ospitarli. Ora, è impossibile proseguire indefinitamente la costruzione di un edificio mantenendone costante la sezione: l'edificio crolla non appena la forza che viene esercitata su una parte della costruzione dalla parte sovrastante supera il carico massimo che il materiale di cui è costituito l'edificio può sopportare. Quindi la finzione narrativa di Buzzati non può concretamente realizzarsi. Ma cosa succede se consideriamo una sezione variabile? Schematizziamo l'edificio come un corpo rigido omogeneo di densità ρ avente sezioni orizzontali quadrate. Trascurando la presenza dell'aria, la forza esercitata su una porzione dell'edificio dalla parte sovrastante coincide con il peso di tale parte. Sia $A(x)$ l'area della sezione dell'edificio alla quota x, misurata dal terreno verso l'alto, e sia P la massima pressione che il materiale di cui è costituito l'edificio può sopportare, che assumiamo costante. L'edificio è realizzabile fino alla quota H se per ogni x tale che $0 \le x \le H$ è soddisfatta la condizione

$$\int_x^H \rho g A(x) dx \le PA(x) \tag{1}$$

dove è trascurabile la variazione della gravità con la quota. L'edificio ha la massima altezza, compatibilmente con il materiale che lo costituisce, se imponiamo che nella formula (1) valga l'uguaglianza; in tale ipotesi, differenziando ambo i membri dell'uguaglianza, otteniamo

$$-\rho g\, A(x) = PA'(x).$$

Questa equazione differenziale si risolve banalmente:

$$A(x) = A_0\, \mathrm{e}^{-\rho g\, x/P}$$

dove A_0 indica la sezione dell'edificio a contatto col terreno. Il profilo dell'edificio è descritto dall'andamento del semilato della sezione con la quota, ossia dalla funzione $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{A(x)}$, che è una funzione esponenziale decrescente:

$$f(x) = f_0\, \mathrm{e}^{-\rho g\, x/2P}.$$

L'analisi svolta indica che assegnata la sezione di base A_0 e la sezione sommitale A_T di un edificio, ed il materiale di costruzione, la massima altezza che l'edificio può raggiungere è determinata dalla relazione $H = (P/\rho g)\ \ln\ (A_0/A_T)$; inoltre l'edificio di massima altezza è quello con profilo descritto da una curva esponenziale decrescente. Ma il profilo della Torre Eiffel è descritto da una curva esponenziale? Prima di affrontare questa domanda, è utile dare una valutazione numerica del limite di altezza. Si può assumere che P rappresenti il carico di snervamento, vale a dire la pressione oltre la quale il comportamento del materiale cessa di essere elastico e si manifestano significative deformazioni plastiche permanenti; per il ferro risulta P = 130 MPa. La densità del ferro in condizioni ordinarie vale $\rho = 7{,}96 \cdot 10^3$ kg/m^3; per la Torre Eiffel si ha $A_0/A_T = (62{,}5/5)^2$, onde risulta che la massima altezza che potrebbe avere è 8,4 km!

Nella fig. 1 le lunghezze sono espresse in metri, il profilo rappresentato dalla funzione $f(x) = 62{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x}$ è sovrapposto al profilo reale della torre, tratto da un'immagine presente nel sito [2]. Il parametro 62,5 m rappresenta la semilunghezza in metri del lato del quadrato in cui è iscritta la base della torre; il parametro 0,01 m^{-1} è stato ricavato imponendo che f (100) = 20, secondo una misura che ho eseguito sull'immagine avvalendomi del programma "CABRI-Géomètre". Il procedimento che ho seguito non è del tutto preciso, in quanto la riproduzione fotografica introduce inevitabilmente distorsioni prospettiche delle dimensioni reali; inoltre la fotografia non riproduce la sezione della torre eseguita con un piano passante per il suo asse, il cui contorno è descritto dalla funzione $f(x)$. Pur tenendo conto di queste difficoltà, tuttavia la discrepanza tra il profilo esponenziale e quello reale indica che la Torre Eiffel non ha un profilo esponenziale e che, quindi, l'analisi fin qui svolta non è sufficiente per determinare il profilo della Torre Eiffel. Giungiamo dunque a chiederci: quali elementi sono stati considerati nella progettazione della Torre Eiffel? Nel seguito l'ingegner Eiffel ci spiegherà che trascurare la presenza dell'aria non è una buona idea...

La Torre Eiffel, progettata dall'ingegnere Alexandre Gustave Eiffel (1832-1923) è uno degli edifici più facilmente riconoscibili del pianeta. Fu costruita per la Esposizione Universale del 1889 in commemorazione del centenario della Rivoluzione Francese. È il simbolo della tecnologia del XIX secolo: quando fu inaugu-

rata, nel marzo del 1889, era la costruzione più alta del mondo, e tale rimase fino al 1930. Si trova a Parigi, sulla riva sinistra della Senna, nella parte sud-occidentale della città. I quattro pilastri che ne costituiscono la base sono disposti nelle direzioni dei quattro punti cardinali e sono inscritti in un quadrato di lato 125 m. Essi confluiscono in una unica colonna che originariamente si elevava fino a 312 m, ma che in seguito fu innalzata a 324 m da un'antenna televisiva. Vi sono delle piattaforme accessibili al pubblico alle quote di 58 m, 116 m e 273 m. Il materiale che costituisce la torre è il ferro forgiato, in quanto l'acciaio, all'epoca in cui fu costruita, non era facilmente reperibile. La costruzione richiese poco più di due anni; nel corso dei lavori si ebbe un unico incidente mortale. Per erigerla furono impiegati $7{,}3 \cdot 10^6$ kg di ferro. Questo comporta che periodicamente la struttura deve essere interamente ridipinta con una vernice antiruggine.

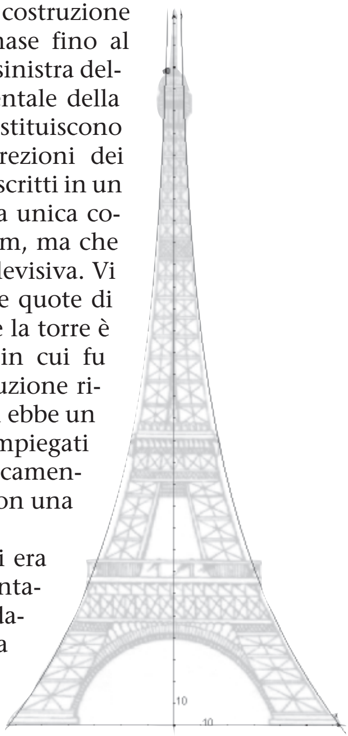

Figura 1.

Per costruire un edificio di queste dimensioni era necessario individuare i fenomeni fisici fondamentali da considerare nella progettazione. Non secondario era il fattore estetico, data la valenza simbolica della costruzione. Vediamo come Eiffel stesso si esprime in una intervista [2] rilasciata al quotidiano *Le Temps* del 14 febbraio 1887: *Je crois, pour ma part, que la Tour aura sa beauté propre. Parce que nous sommes des ingénieurs, croit-on donc que la beauté ne nous préoccupe pas dans nos constructions et qu'en même temps que nous faisons solide et durable, nous ne nous efforçons pas de faire élégant? Est-ce que les véritables conditions de la force ne sont pas toujours conformes aux conditions secrètes de l'harmonie?(...) Or de quelle condition ai-je eu, avant tout, à tenir compte dans la Tour? De la résistance au vent. Eh bien! je prétends que les courbes des quatre arêtes du monument, telles que le calcul les a fournies (...) donneront une grande impression de force et de beauté.* Queste parole testimoniano il pragmatismo dell'ingegner Eiffel e la sua illuministica fiducia nell'armonia estetica che scaturisce dai calcoli matematici (di seguito traduco liberamente): *Dobbiamo preoccuparci di realizzare un edificio solido e duraturo. Di quale fenomeno dobbiamo principalmente tener conto? Della resistenza al vento. Ebbene, il profilo del monumento, che sarà come i calcoli matematici hanno stabilito che debba essere, darà un'impressione di grande forza e di bellezza.* Impostazione ripresa e approfondita da uno dei massimi architetti della modernità, Le Corbusier (Charles-Edouard Jeanneret-Gris, 1887-1965): *matematica non significa scienze matematiche. Non si tratta soltanto di calcoli ma della presenza di una sovranità; una legge di ordine e consonanza. Il rigore è tale che l'opera d'arte ne è una conseguenza necessaria, che sia un disegno di Leonardo, la stupefacente perfezione del Partenone, il ferreo e impeccabile gioco costruttivo della cattedrale, l'unità che realizza Cézanne, lo splendore unitario dell'albero in radici, tronco, rami, foglie e fiori* [3].

Come viene mostrato in [4], la progettazione della Torre Eiffel si basa su considerazioni di fisica-matematica elementari. È sufficiente imporre che il massimo momento della forza generata dal vento sulla torre sia compensato dal momento generato dal peso della torre.

Nel seguito considereremo la torre come un corpo rigido omogeneo di densità ρ avente sezioni orizzontali quadrate; lo scopo della trattazione sarà di deriva-

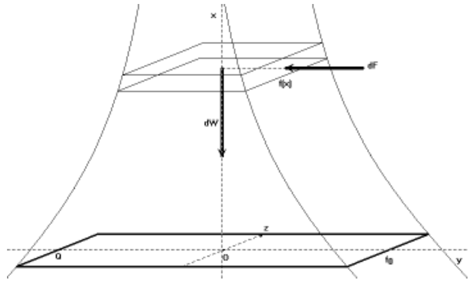

Figura 2.

re un'espressione della funzione che caratterizza il profilo del corpo. Introduciamo un riferimento con origine nel centro della base della torre, asse x verticale diretto verso l'alto ed asse y orizzontale; la funzione che intendiamo derivare, indicata come $f(x)$, rappresenta la lunghezza del semilato della sezione della torre ad una quota x. Fissiamo l'attenzione su uno strato della costruzione compreso tra due piani orizzontali posti alle quote x e $x+\mathrm{d}x$. Detto strato ha peso

$$\mathrm{d}W = g \cdot \mathrm{d}m = g\rho\,\mathrm{d}V = g\rho\,[2\,f(x)]^2\,\mathrm{d}x = 4\,\rho g\,f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

essendo g l'accelerazione di gravità.

Sia $p(x)$ la pressione che l'aria esercita sulla torre; tale pressione dipenderà, in generale, dalla velocità e dalla densità dell'aria, e, attraverso queste grandezze, dalla quota; in particolare, lo strato della costruzione di spessore dx che stiamo considerando sarà soggetto ad una forza orizzontale diretta nel verso negativo dell'asse y di intensità

$$\mathrm{d}F = p(x)\;2\,f(x)\;\mathrm{d}x$$

assumendo che la superficie esterna della torre sia verticale; con questa assunzione sovrastimiamo l'effetto della pressione esercitata dal vento.

Lo strato ovviamente è soggetto all'ulteriore azione delle forze esercitate su di esso dalle altre parti della torre, forze non illustrate in figura.

Prendiamo in considerazione adesso la porzione di torre compresa tra la quota 0 e la quota h, con $h \leq H$, essendo $H = 300$ m la massima quota della torre; su detta porzione agirà l'aria, la gravità, la forza esercitata dal terreno e la forza esercitata dalla porzione di torre sovrastante. Se la torre si trova in una situazione di equilibrio statico, la risultante delle forze agenti sulla porzione considerata deve essere zero e il momento risultante delle forze agenti sulla porzione considerata deve essere zero. La condizione sulle forze non ci fornisce informazioni utili; calcoliamo i momenti rispetto al bordo sinistro della costruzione (punto Q in figura 2). Il momento della forza peso è diretto nel verso positivo dell'asse z con intensità

$$\tau_W = \int_0^h 4\rho g f^2(x) f_0 dx\,.$$

Il momento della forza del vento è diretto nel verso negativo dell'asse z con intensità

$$\tau_F = \int_0^h 2xp(x)f(x)dx\,.$$

Per quanto riguarda la forza esercitata dal terreno, non ne conosciamo intensità e direzione, ma possiamo ritenere che, in condizioni estreme, ossia con il momento della forza esercitata dall'aria pari al massimo valore compatibile con l'equilibrio, detta forza sia applicata nel punto Q, onde il momento sia zero; infine appare plausibile che il momento della forza esercitata dalla porzione di torre sovrastante sia diretto nel verso positivo dell'asse z con intensità proporzionale alla massa di tale porzione; trascurando la variazione della sezione con la quota, risulta

$$\tau_s \propto (H - h)\,.$$

La condizione di equilibrio si scrive

$$\frac{1}{2}\int_0^h f^2(x)dx + c(H-h) = \int_0^h xq(x)f(x)dx \qquad (2)$$

per ogni $h \leq H$, avendo introdotto la funzione adimensionale $q(x) = p(x) / 4\rho g f_0$ ed essendo c una costante con le dimensioni di una superficie.

Differenziando l'equazione (2) rispetto ad h otteniamo, per ogni $x \leq H$

$$\frac{1}{2}f^2(x) - c = xq(x)f(x).$$

Ponendo in essa $x = 0$ ricaviamo che $c = f_0^2/2$, onde possiamo riscrivere la condizione di equilibrio:

$$\frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f_0^2 = xq(x)f(x).$$

La soluzione accettabile di questa equazione di secondo grado è quella negativa, in quanto deve essere $f(x) \leq f_0$ con $x \leq H$; la funzione $f(x)$ che descrive il profilo della torre nel primo quadrante degli assi cartesiani è l'opposto della soluzione, ossia

$$f(x) = \sqrt{x^2q^2(x) + f_0^2} - xq(x). \qquad (3)$$

Il profilo evidentemente è determinato dall'andamento con la quota della funzione $q(x)$, ossia dall'andamento della massima pressione del vento compatibile con l'equilibrio.

Gli studi condotti da Eiffel, anche con l'ausilio di modelli in gallerie del vento, lo portarono a stabilire che la funzione $q(x)$ si approssima ad 1 a quote intermedie, è circa del 30% inferiore al livello del suolo ed è circa del 30% superiore alla quota di 300 m. Questo andamento è descritto dalla funzione lineare $q_1(x) = 2 \cdot 10^{-3}\,x + 0{,}7$ con $x \leq H$.

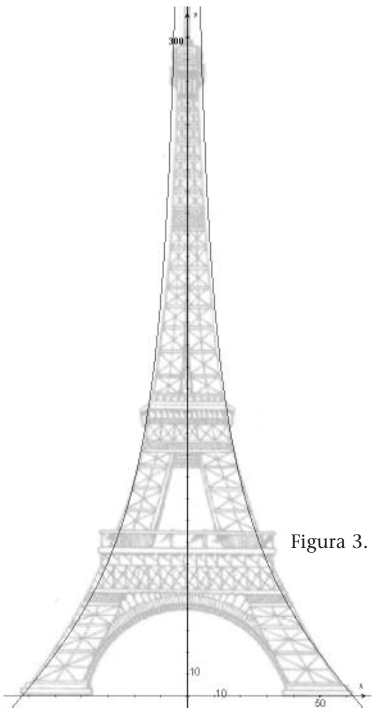

Figura 3.

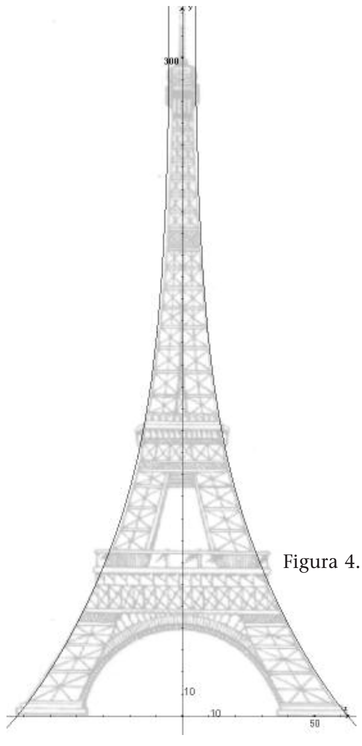

Figura 4.

Nella figura 3, il profilo rappresentato dalla funzione $f(x)$ con $q(x) = q_1(x)$ è sovrapposto al profilo della torre riprodotto nell'immagine. Come si vede, l'accordo è abbastanza soddisfacente. In [4] viene ricavato un polinomio di terzo grado in x, $q_3(x) = 0{,}69 - 1{,}53 \cdot 10^{-3} x + 3{,}961 \cdot 10^{-5} x^2 - 9{,}221 \cdot 10^{-8} x^3$ con $x \leq H$ che fornisce un profilo sostanzialmente identico a quello riprodotto nell'immagine, come risulta dalla figura 4. La discrepanza tra il profilo teorico e quello dell'immagine, che si coglie nella parte alta della costruzione, va attribuita alla distorsione prospettica delle dimensioni reali introdotta dalla riproduzione fotografica, che evidentemente è maggiore nelle zone più lontane dall'obiettivo della macchina fotografica.

L'analisi condotta in [4] indica che Eiffel ha progettato la costruzione della torre basandosi su un andamento della funzione $q(x)$ espresso dalla funzione $q_3(x)$, determinando i coefficienti del polinomio di terzo grado mediante simulazioni con modelli in gallerie del vento.

Una volta definita la funzione $q(x)$ è possibile determinare il volume occupato dal corpo che stiamo considerando come modello della torre; basta calcolare l'integrale $V = 4\int_0^H f^2(x)dx$. Considerando l'espressione cubica per la funzione $q(x)$, risulta $V = 7{,}25 \cdot 10^5$ m^3. Poiché la massa del materiale impiegato nella costruzione è nota, e risulta $7{,}3 \cdot 10^6$ kg, possiamo determinare la densità media della torre reale, $\rho = 10{,}1$ kg/m^3. Confrontando questo valore con la densità dell'aria in condizioni ordinarie, $\rho_A = 1{,}29$ kg/m^3, scopriamo che la densità della Torre Eiffel è soltanto 7,83 volte la densità dell'aria! Questo risultato è una conseguenza del fatto che la torre ha una struttura traforata, ricca di aperture, estremamente leggera.

Qual è la massima velocità del vento che il nostro modello di torre può sopportare? Possiamo stimarla calcolando la massima pressione compatibile con l'equilibrio della struttura, ossia $p_{max} = 4\,\rho g\, f_0\, q_{max} \approx 30$ kPa. Ricordando l'equazione di Bernoulli, otteniamo $v_{max} \approx (2p_{max}/\rho_A)^{1/2} \approx 800$ km/h. Si tratta di una velocità del tutto irraggiungibile anche negli eventi meteorologici più violenti.

Bibliografia e note

[1] D. Buzzati, *Il colombre*, Mondadori, Milano, 1966.

[2] www.tour-eiffel.fr .

[3] Le Corbusier, *Scritti*, Torino, Einaudi, 2002.

[4] J. Gallant, "The shape of Eiffel Tower", *Am. J. Phys.* **70**, 160 (2002).

[1] La torre è di ferro, non di acciaio.

Non c'è dubbio. Personalmente, guardando indietro, penso sempre con piacere che ho avuto una vita molto fortunata, sia per gli argomenti che ho trattato, sia per le persone con cui ho avuto a che fare. E penso sempre con piacere che quando a un certo punto io scomparirò ci saranno sempre nuove generazioni che andranno avanti, che cambieranno tutto. Probabilmente diranno di noi: "Ma guarda questi, che idee primitive avevano!" e andranno avanti. A me piace moltissimo quest'idea dell'evoluzione della scienza e del pensiero che andrà oltre di noi e continuerà a progredire.

C. Rubbia e P. Angela, *Edoardo Amaldi - Scienziato e cittadino d'Europa*, Leonardo Periodici, Milano 1992, p. 285.