GIANNI BONERA
Dipartimento di Fisica "A. Volta",
Università di Pavia

NOTE DI LABORATORIO

La Bilancetta del Signor Galileo Galilei

Nel quale, ad imitazione d'Archimede nel Problema della Corona, s'insegna a trovare la proporzione del misto di due metalli insiemi, e la fabbrica dell'istesso istrumento.

(Pervenuto il 4.03.94 approvato il 17.06.94)

ABSTRACT
Galilei's *La Bilancetta*, written in 1586, is here edited and analysed. In this work *"by following Archimedes on the so-called Crown Problem, it is given the method to find the proportion of each of two metals in their mixture and to build the instrument itself"*.

Galileo scrisse questo breve lavoro (1) nel 1586 in un italiano così perfetto e raffinato che vale la pena utilizzare, dove possibile, il testo originale.

La motivazione del lavoro viene data nelle prime righe

"Siccome è assai noto a chi di leggere gli antichi scrittori cura si prende, aver Archimede ritrovato il furto dell'Orefice nella corona di Jerone, così parmi fin ora ignoto il modo, che si grande uomo usar dovesse in tale ritrovamento. Attesoché il credere, che procedesse col mettere tal corona dentro l'acqua, avendovi prima posto altr'e tanto di oro purissimo, e di argento separati, e che dalle differenze del far più o meno crescere, o traboccar l'acqua, venisse in cognizione della mistione dell'oro coll'argento, di che tal corona era composta; par cosa (per così dirla) molto grossa, e lontana dall'esquisitezza, [...] delle sottilissime invenzioni di sì divino uomo, [...] dalle quali pur troppo chiaramente si comprende, quanto tutti gli altri ingegni a quello di Archimede siano inferiori. [...] Ma il conoscer io, che tal modo è in tutto fallace, [...], mi ha più volte fatto pensare, in qual maniera col mezzo dell'acqua si potesse esquisitamente ritrovare la mistione di due metalli, e finalmente dopo aver con diligenza riveduto quello, che Archimede dimostra ne' i suoi libri [...] mi è venuto in pensiero un modo, [...], il qual crederò io esser l'istesso, che usasse Archimede."

Per la dimostrazione del metodo, Galileo parte da quello che oggi noi chiamiamo il principio di Archimede, di cui ne fornisce il seguente enunciato tratto direttamente dall'opera di Archimede. (2)

"[...] i corpi solidi, i quali nell'acqua vanno a fondo, pesano manco nell'acqua, che nell'aria tanto, quanto è nell'aria la gravità [il peso] *di tanta acqua in mole, quanto è esso solido".*

Di tale principio fornisce una dimostrazione molto semplice.

"Mettendosi per esempio nell'acqua una massa di oro, se tal massa fosse di acqua, non peserebbe cosa alcuna, perché l'acqua nell'acqua non si muove insù o in giù (3); resta dunque, che tale massa di oro pesi nell'acqua solamente quel tanto, in che la gravità dell'oro supera la gravità dell'acqua."

Il metodo proposto è il seguente:

"Se dunque in una bilancia esquisita (4) [vedi fig. 1a] *noi appenderemo un metallo dall'un braccio* [in B], *e dall'altro un contrappeso* P_c [in A], *che pesi egualmente col detto metallo,* [immergendo il metallo] *nell'acqua, lasciando il contrappeso nell'aria* [vedi fig. 1b], *aciocché detto contrappeso equivalga* [di nuovo] *al metallo, bisognerà ritirarlo* [in E] *verso il perpendicolo* [il fulcro C].

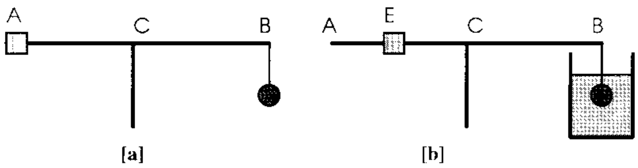

Fig. 1 - Schema della *'bilancietta'* proposta da Galileo.

Quante volte la distanza CA *conterrà la distanza* AE, *tante volte il metallo peserà più* [di un uguale volume] *di acqua."*

Di tale affermazione non ne viene data alcuna giustificazione.

Con notazione moderna, indicato con P_m e P_a rispettivamente il peso del metallo e quello di un uguale volume di acqua, la bilancia è in equilibrio quando

$$(P_m - P_a) \cdot CB = P_c \cdot (CA - AE) \qquad 1)$$

da cui, essendo $CA \cdot P_c = CB \cdot P_m$, abbiamo

$$P_m/P_a = CA/AE \qquad 2)$$

Osserviamo che, poiché il rapporto P_m / P_a rappresenta il peso specifico relativo del metallo, il risultato non dipende dalla forma o dal peso del campione appeso in B, ma solo dal metallo usato.

"Poniamo dunque che il peso in B *sia oro, e che pesato nell'acqua, il contrappeso torni in* E, *e poi facendo il medesimo dell'argento finissimo, il suo contrappeso, quando si peserà poi nell'acqua, torni in* F, *il qual punto sarà più vicino a* C, *siccome l'esperienza ne mostra per essere l'argento men grave dell'oro. Ma se noi averemo un misto di argento e oro, è chiaro che per partecipare d'argento, peserà meno che l'oro puro, e per partecipare dell'oro, peserà più che il puro argento: e però* [perciò] *pesato in aria, e volendo che il medesimo contrappeso lo contrappesi in acqua, sarà di mestiere ritirar detto contrappeso più verso* C, *che non è il punto* E, *il quale è il termine dell'oro, e medesimamente più lontano dal* C, *che non è l'*F, *il quale è il termine dell'argento; però cascherà* [in G] *tra i termini* E, F *e dalla proporzione, nella quale verrà divisa la distanza* EF, *s'averà squisitamente la proporzione dei due metalli, che tal misto compongono.*

Anche questa affermazione non viene giustificata.

Se pensiamo il nostro oggetto appeso in B, composto di una parte P_{Au} di oro e di una parte P_{Ag} di argento, in aria esso sarà equilibrato da un contrappeso uguale $(P_{Au} + P_{Ag})$ posto in A, mentre in acqua esso sarà equilibrato da un contrappeso P_{Au} posto in E e da un contrappeso P_{Ag} posto in F, il che equivale al contrappeso $(P_{Au} + P_{Ag})$ posto in G tale che (vedi fig. 2).

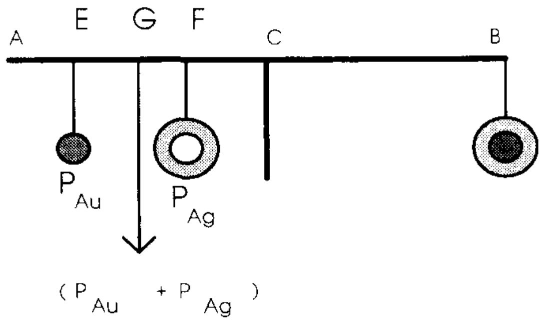

Fig. 2 - Schema di funzionamento della bilancia di Galileo per la determinazione del contenuto in oro in una lega oro-argento.

$$GF : GE = P_{Au} : P_{Ag} \qquad 3)$$

Passiamo ora alla realizzazione dello strumento.

"Per fabbricare dunque la bilancia, pigliasi un regolo lungo almeno un braccio [0,55 m] *e quanto più sarà lungo, più sarà esatto lo strumento, e dividasi nel mezzo, dove si ponga il perpendicolo; poi si aggiustino le braccia, che stiano in equilibrio, coll'assottigliar quello che pesasse più, e sopra una delle braccia si notino i termini, dove ritornano i contrappesi de' metalli semplici, quando saranno pesati nell'acqua.*

Per quanto abbiamo visto non è affatto necessario che i bracci della bilancia siano uguali tra loro, purché la bilancia a vuoto sia in equilibrio, inoltre per la taratura della bilancia si possono usare campioni di metallo di qualsiasi forma e peso. Queste particolarità, che facilitano molto la costruzione e l'uso della bilancia, non appaiono tuttavia esplicitamente nel lavoro di Galileo.

"Fatto che sarà questo, resta a ritrovar modo, col quale si possa con facilità aver la proporzione, secondo la quale le distanze tra termini de' metalli puri verranno divise da' segni de' misti, il che si conseguirà in questo modo.

Si avrà due fili sottilissimi passati per la medesima trafila [dello stesso diametro], *uno di acciaio, l'altro di ottone* [cioè di colore diverso], *e sopra il punto* E *termine dell'oro puro avvolgasi il filo di acciajo, avvolgendoci sotto l'altro filo di ottone, e avendo fatto dieci voltate con quello di acciajo si avvolga dieci altre voltate col filo di ottone, e così via finché sia pieno tutto lo spazio fra li punti* E *e* F.

[...] Ma qui è d'avvertire, che nasce una difficoltà nel contare, perocché per essere quei fili sottilissimi, come si richiede all'esquisitezza, non è possibile colla vista numerarli, perocché tra si piccoli spazj si abbaglia l'occhio. Adunque per numerarli con facilità pigliasi uno stiletto acutissimo, [...], col quale si vada adagio scorrendo sopra detti fili, che così parte mediante l'udito, parte mediante il ritrovar la mano ad ogni filo l'impedimento, verranno detti fili numerati, dal numero dei quali si averà l'esquisita quantità de' metalli semplici, de' quali il metallo misto è composto, avvertendo che li semplici risponderanno contrariamente alle distanze [cioè il numero di fili verso il termine dell'oro ci dà il contenuto d'argento e quello verso il termine dell'argento il contenuto d'oro].

In una 'bilancetta' realizzata dal prof. P. Mascheretti a Pavia in occasione della terza Settimana della Cultura Scientifica, l'avvolgimento dei fili era stato sostituito con una striscia di carta millimetrata e il contrappeso veniva ottenuto con un piattello caricato con pallini di piombo; come campione da analizzare veniva utilizzato un cilindro cavo di alluminio in cui era inserito un secondo cilindro di rame. Era così possibile verificare a posteriori l'accuratezza della misura.

Notiamo che la bilancia si presta molto bene anche per la misura del peso specifico relativo dei solidi (eq. 2).

Note Storiche

La Bilancia di B. Castelli

Nel Volume IV dell'Edizione Nazionale dell'opera di Galileo, dopo il lavoro nel quale viene presentata la *Bilancetta*, è riportata una nota dell'abate don Benedetto Castelli nella quale viene presentato un diverso metodo mediante il quale è possibile ottenere direttamente il contenuto assoluto di uno dei due metalli.

Consideriamo una bilancia ordinaria a bracci uguali ACB con fulcro in C e i cui piattelli D e E oltre che di uguale peso siano anche della stessa sostanza (vedi fig. 3a).

Poniamo in D una certa quantità di oro, ad esempio un'oncia, e in E un'altra oncia di argento.

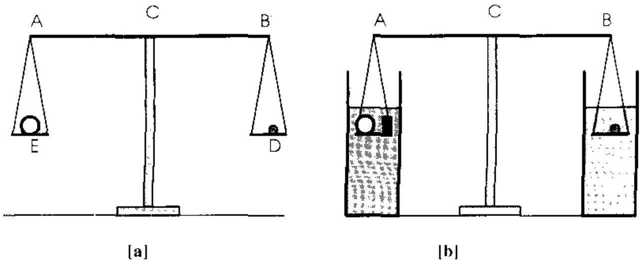

Fig. 3 - Schema di una bilancia a bracci uguali proposta da B. Castelli.

La bilancia sarà in equilibrio in aria, ma tale equilibrio sarà distrutto se entrambi i piattelli vengono immersi in acqua. Utilizzando un filo di piombo, ne tagliamo con cura un pezzetto P tale che posto sul piattello E insieme all'argento ristabilisca l'equilibrio in acqua (vedi fig. 3b).

Il pezzetto di piombo P costituisce la *misura* relativa ad un'oncia d'oro e servirà per tutte le bilance del mondo. Si costruiscano ora altri campioni uguali di piombo P ed anche dei sottomultipli $p = P/n$.

Il sistema è ora pronto per misurare quante oncie d'oro vi siano in un misto qualsiasi di oro e di argento.

Considerato un misto M di oro e di argento lo si ponga su di un piattello e lo si equilibri in aria con altrettanto peso di argento. Immersi i due piattelli in acqua, si aggiungano sul piattello dell'argento vari campioni di piombo fino a ristabilire l'equilibrio: se ciò si ottiene ad esempio con cinque campioni e un quarto di piombo, nel misto sono contenute 5,25 once d'oro.

Infatti il misto può essere pensato come costituito da due oggetti distinti, uno d'oro di peso P_{Au} e uno d'argento di peso P_{Ag}. In aria il misto sarà equilibrato da un peso $(P_{Au} + P_{Ag})$ di argento, mentre in acqua la parte d'argento sarà equilibrata dal peso P_{Ag} dell'argento, e quella d'oro dal peso P_{Au} d'argento più tanti campioni P e p di piombo, quante sono le once e le frazioni di once d'oro.

Un secondo dispositivo per ottenere il contenuto in oro di una lega di oro e argento può essere ottenuto utilizzando una bilancia a bracci diseguali (vedi fig. 4a).

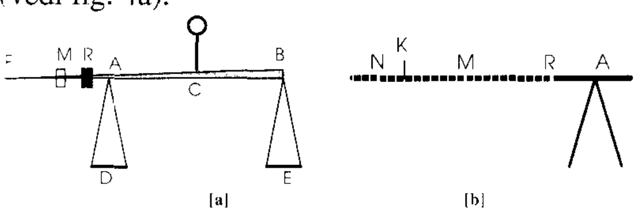

Fig. 4 - Schema di una bilancia a bracci diseguali proposta da B. Castelli.

Sia CA = CB e siano i due piattelli D ed E della stessa sostanza e di uguale peso; inoltre la bilancia sia in equilibrio con il romano (5) posto in R, il che si può realizzare facendo il braccio CB più spesso del braccio CA.

Posto come prima un'oncia P_0 d'oro in E e un'oncia P_0 d'argento in D, l'equilibrio della bilancia non verrà alterato, ma se si pongono entrambi i piattelli in acqua, per ristabilire l'equilibrio sarà necessario spostare il romano verso l'esterno, ad esempio in M.

Per l'equilibrio della bilancia deve essere

$$P_r \cdot (MC - RC) = d_a \cdot P_o \cdot ((AC/d_{ag}) - (CB/d_{au}))$$

essendo d_a, d_{ag} e d_{au} le densità dell'acqua, dell'argento e dell'oro rispettivamente, e P_r il peso del romano. Abbiamo quindi per lo spostamento RM del romano

$$RM = (MC - RC) = k \cdot P_0$$

dove $k = d_a \cdot CB \cdot (d_{au} - d_{ag}) / (d_{au} \cdot d_{ag} \cdot P_r)\ mN^{-1}$ è una costante caratteristica della bilancia.

Se ripetessimo l'esperimento con due once d'oro troveremmo uno spostamento RN = 2RM e così via.

Si divida allora il tratto RF in intervalli uguali di lunghezza RM, dividendo poi ciascun intervallo ad esempio in 10 parti uguali.

Tarata in tal modo la bilancia per trovare il contenuto in oro di una lega di oro e d'argento la si pone in E e la si equilibra con un uguale peso d'argento. Posti ora entrambi i piattelli in acqua, se per ristabilire l'equilibrio è necessario spostare il romano ad esempio in K (vedi fig. 4b), la lega conterrà 1,7 oncie d'oro.

B La bilancia di Archimede

L'episodio a cui si riferisce Galileo è narrato da Vitruvio (6). Secondo tale racconto, Archimede prese una massa d'oro e una d'argento, aventi ciascuna il medesimo peso della corona; quando vennero immerse una dopo l'altra in un recipiente pieno d'acqua, ciascuna delle due masse provocò la fuoriuscita di un certo volume di acqua, che venne calcolato misurando quanta acqua occorreva ogni volta per riempire di nuovo il recipiente dopo che il metallo era stato tolto. Quando l'esperimento venne ripetuto con la corona, essa provocò una fuoriuscita di acqua maggiore di quella provocata dalla massa di oro puro e minore di quella provocata dalla massa d'argento.

Un'altra versione dell'episodio, più dettagliata e scientifica, è riportata in un poema latino attribuito a Prisciano il Grammatico (sec. V d.C.) di cui però Galileo difficilmente poteva esserne venuto a conoscenza. Infatti secondo quanto riporta E.J. DIjksterhuis (7), il poema *Carmen de ponderibus*, attribuito a Prisciano, venne stampato per la prima volta nel 1470 in una rarissima edizione dell'opera *Volumen de octo partibus arationes*. I passi relativi al problema della corona vennero riportati più tardi nell'edizione archimedea del Torelli (8).

"Ai due estremi di una bilancia a bracci uguali vengono poste due masse uguali di oro e argento, ad esempio di 1 libra. Immerse entrambe le masse in acqua si misura la differenza di peso, cioè la massa m che si deve aggiungere alla libra d'oro per riottenere l'equilibrio. Si ripete ora l'esperimento con la corona ed un peso uguale di argento e si determina la massa M che è necessario aggiungere alla corona per ristabilire l'equilibrio quando corona e massa d'argento vengono immerse in acqua. Dalla figura ci si rende facilmente conto che il rapporto M/m ci fornisce direttamente o il numero di libre di oro puro contenuto nella corona."(8)

Questa bilancia è identica a quella proposta dall'abate Castelli (fig. 3).

Recentemente (10) è stato ritrovato un manoscritto arabo del 1137, il *Kitab Mizan al-Hikmat* di Abd. al-Rahman al-Kahzini, nel quale è riportato parte di un trattato di Archimede *Sulle Bilance*, andato perduto, nel quale si descrive una bilancia per la determinazione del contenuto in oro di una lega di argento ed oro. Il funzionamento di questa bilancia, che è sostanzialmente analoga a quella descritta da Prisciano, è stato presentato e ampiamente discusso in lavoro di S. Pugliese Jona apparso su *La Fisica nella Scuola*. (11)

Lo svantaggio di queste bilance sta nel fatto che esse richiedono sempre di utilizzare come contrappeso un uguale peso di argento, cosa che, come abbiamo visto, non è richiesta nella bilancia di Galileo.

Bibliografia e note

(1) G. Galilei, *La bilancetta*, Edizione nazionale 1890, vol. IV, p. 243.

(2) Archimedis, *De iis quae vehuntur in aqua, liber primus*, cum commentaris F. Commandini urbinatis, Bononiae, ex officina A. Benaci MDLXV. Si tratta della proposizione IV, che nella versione latina suona *"Solidae magnitudines humido graviores [...] erunt tanto leviores quanta est gravitas humidi molem habentis solidae magnitudini aequalem.*

(3) La stessa idea la ritroviamo in Stevino (*Hypomnemata mathematica*, Leida 1608, vol. 4); egli tuttavia la giustifica in base all'impossibilità del *perpetuum mobile*: infatti se la massa d'acqua si muovesse, in sù o in giù, saremmo costretti ad ammettere che altra acqua occuperebbe lo spazio lasciato libero e, trovandosi nelle stesse condizioni, si muoverebbe anch'essa nello stesso verso, e così via.

(4) Galileo usa frequentemente i termini *esquisito* e *esquisitezza* nel senso di accurato, preciso.

(5) Nella bilancia a bracci diseguali, stadera, il contrappeso mobile viene comunemente chiamato *romano*.

(6) Vitruvio, *De Architectura*, IX, 3, ed. F. Krohn, Lipsia 1912, p. 198.

(7) E.J. Dijksterhuis, *Archimede*, ed. Ponte alle Grazie, 1985, p. 19

(8) J. Torelli, *Archimedes quae supersunt omnia cum Eutocii Ascolonitae commentarius* ex rec, Oxonii, 1792, p. 364.

(9) Testo riportato da E.J. Dijksterhuis, op. cit., p. 20.

(10) P.B. Bardis, "The Science Teacher", vol. 51, n. 7, ottobre 1984.

(11) S. Pugliese Jona, "La Fisica nella Scuola", vol. 21, 1988, p. 2.

CONASTA 44 - SCIENCE TEACHING: AN INTERNATIONAL PERSPECTIVE - Conferenza Nazionale della Australian Science teachers' Association, Brisbane, 24-29 Settembre 1995

CONASTA 44 rivolge un invito a singoli e a gruppi di ricerca affinché presentino contributi a livello di istruzione primaria, secondaria o universitaria, sui temi seguenti:

- Pratica e/o teoria dell'insegnamento scientifico
- Progetti curriculari
- Problemi di discriminazione sociale e/o di genere nell'insegnamento delle scienze
- Ricerca scientifica
- Scienza nella Scuola primaria
- Implementazione di modelli educativi o di materiali curriculari.

I contributi possono assumere la forma di conferenza, seminario o discussione interattiva da 45 minuti, oppure di Workshop fortemente interattivo da 150 minuti.

Chi è interessato può scrivere a:

The Convener, CONASTA 44
Continuing Education
University of Queensland
St. Lucia, AUSTRALIA 4072
fax 0061-7-3657099
e-mail Conasta 44@ceu.up.oz.au

oppure chiedere copia del materiale informativo a Silvia Pugliese Jona, via San Nazario 22, 10015 Ivrea (Torino)