

Didattica

Alessio Seganti
Liceo Torricelli-Biliardini Faenza

Studio del moto del pendolo rigido con l'uso di *smartphone*

ABSTRACT
This experiment consists in the measurement of the oscillation period of a rigid pendulum by using the accelerometer of a smartphone and an ultrasound motion sensor.

L'obiettivo di questo esperimento è comprendere le caratteristiche del moto oscillatorio (periodo, frequenza) e la sua legge oraria del moto (per posizione, velocità e accelerazione), per poi arrivare alla legge dell'isocronismo del pendolo. Peculiarità che distingue questo esperimento rispetto a prove simili effettuate con pendoli a filo, è il calcolo del momento di inerzia di corpi complessi e la dipendenza della frequenza da questa grandezza.

Strumento fondamentale per effettuare delle misure di accelerazione è uno *smartphone* con installata una *app* di presa dati (per esempio, *Sensor Kinetics PRO* o *Physics Toolbox Suite* per *Android*) a cui va affiancato un foglio di calcolo (*MS Excel* o *Libre Office Calc*) e un *software* di elaborazione dati per la fase di analisi (per esempio *Geogebra*).

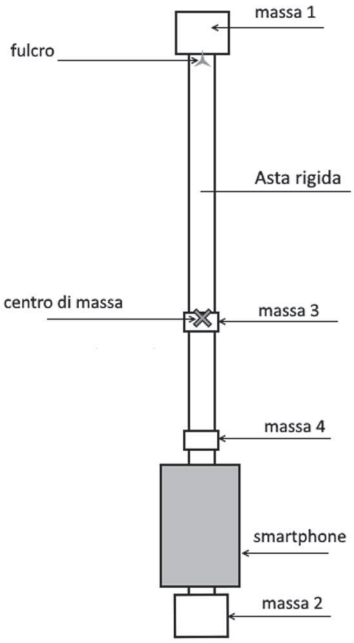


Figura 1. Schema del pendolo rigido.

Il pendolo di Kater* consiste in una sbarra di metallo (quella usata dall'autore è a sezione circolare, ma può essere anche a sezione quadrata o rettangolare) posta in oscillazione attorno a un punto vicino all'estremo superiore. Lungo la sbarra possono essere posizionate a una distanza regolabile altre masse. Nel presente esperimento ne sono state usate quattro, di cui due più piccole e due, posizionate agli estremi inferiore e superiore della sbarra, di maggiori dimensioni. Della massa all'estremo superiore fanno parte due "coltelli" che, alloggiati in una scanalatura, fungono da fulcro. In altri modelli di pendolo i coltelli sono invece parte integrante dell'asta.

Per meglio identificare le diverse componenti, il pendolo utilizzato è stato schematizzato nella Figura 1.

Fissiamo lo *smartphone* con cui intendiamo effettuare le misure di accelerazione alla sbarra in posizione opposta rispetto al fulcro, subito al di sopra della massa di maggiori di-

* Il pendolo reversibile di Kater è stato realizzato nel 1817 dal geodeta britannico Henry Kater. Lo strumento venne realizzato per misurare l'accelerazione di gravità. A differenza dei precedenti pendoli gravimetri, non è necessario determinare il baricentro e il centro di oscillazione del pendolo, permettendo così una maggiore accuratezza. Il pendolo di Kater e le sue successive versioni sono stati lo strumento principale per misurare la forza di gravità terrestre nell'ambito dello studio della geodesia fino agli anni Trenta del secolo scorso. Vedi /www.fisica.uniud.it/~santi/didattica/kater.htm (NdR).



Figura 2. Misura della massa dello *smartphone*.

mensioni. Per la riuscita dell'esperimento è importante che il fissaggio sia rigido. Per ottenere il risultato si può usare del nastro biadesivo, più avvolgimenti di nastro adesivo, o una combinazione di entrambi. Per non sporcare o danneggiare il dispositivo si consiglia l'uso di una busta protettiva delle minori dimensioni possibili, che consenta comunque di operare con il *touchscreen*.

Prima di montare il pendolo nel suo *setup* definitivo si procede alla misurazione della massa dei diversi componenti (Figura 2):

Asta	(1645,3 ± 0,1) g
Massa 1	(462,7 ± 0,1) g
Massa 2	(464,7 ± 0,1) g
Massa 3	(56,9 ± 0,1) g
Massa 4	(57,2 ± 0,1) g
Smartphone	(126,9 ± 0,1) g
Massa totale	(2813,7 ± 0,6) g

Tabella 1. Misure delle masse.

Si procede poi alla misurazione con il metro a nastro delle dimensioni dei componenti e delle loro posizioni reciproche.

Lunghezza dell'asta	(67,9 ± 0,1) cm
Spessore delle masse maggiori (1 e 2)	(2,9 ± 0,1) cm
Includendo i coltelli	(3,0 ± 0,1) cm
Altezza dello *smartphone*	(12,1 ± 0,1) cm

Tabella 2. Misura delle lunghezze.

Alla luce di queste misure si procede al calcolo del momento di inerzia complessivo dell'equipaggio mobile rispetto al centro di rotazione.

Il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo centro è pari a $I = \frac{1}{12} ML^2$ ma per calcolare quello rispetto al fulcro occorre applicare il teorema di Huygens-Steiner e sommare il quadrato della distanza fra il fulcro e il centro di massa moltiplicata per la massa. Essendo l'asta cilindrica e uniforme, si assume che il suo centro di massa coincida con il centro geometrico mentre il fulcro è collocato immediatamente sotto la massa maggiore, a 3,0 cm dall'estremità dell'asta.

$$R = \frac{0{,}68}{2}\,\mathrm{m} - 0{,}03\ \mathrm{m} = 0{,}31\ \mathrm{m} \tag{1}$$

$$I_{asta} = \frac{1}{12} ML^2 + MR^2 = \\ = \frac{1}{12} 1{,}645\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}679\ \mathrm{m})^2 + 1{,}645\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}310\ \mathrm{m})^2 = 0{,}221\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{2}$$

Le altre masse in gioco vengono approssimate a masse puntiformi e il loro momento di inerzia si calcola moltiplicando la massa per il quadrato della distanza del loro centro geometrico dal centro di oscillazione:

$$I_{massa\,1} = 0{,}463\ \text{kg} \cdot (0{,}019\ \text{m})^2 = 0{,}0001\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{massa\,2} = 0{,}465\ \text{kg} \cdot (0{,}624\ \text{m})^2 = 0{,}187\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{massa\,3} = 0{,}057\ \text{kg} \cdot (0{,}513\ \text{m})^2 = 0{,}015\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{massa\,4} = 0{,}057\ \text{kg} \cdot (0{,}325\ \text{m})^2 = 0{,}006\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{smart} = 0{,}1269\ \text{kg} \cdot (0{,}605\ \text{m})^2 = 0{,}046\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \qquad (3)$$

Viene quindi calcolato il momento di inerzia complessivo:

$$I = I_{asta} + I_{massa\,1} + I_{massa\,2} + I_{massa\,3} + I_{massa\,4} + I_{smart} =$$
$$= (0{,}221 + 0{,}0001 + 0{,}187 + 0{,}014 + 0{,}005 + 0{,}044)\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}475\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \qquad (4)$$

Se approssimiamo la posizione del centro di massa dell'asta al suo centro geometrico, la sua distanza dal fulcro risulterà essere 31 cm, come calcolato in (1).

Se si considerano la massa dello *smartphone* e delle masse 3 e 4 (le masse 1 e 2 sono trascurabili a questo scopo), la posizione del centro di massa risulta essere:

$$d_{cm} = \frac{31 \cdot 2{,}573 + 60{,}5 \cdot 0{,}127 + 51{,}3 \cdot 0{,}057 + 32{,}5 \cdot 0{,}057}{2{,}814} = 33\ \text{cm} \qquad (5)$$

La pulsazione prevista per l'oscillazione del pendolo si calcola secondo la regola che determina la pulsazione del pendolo composto:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \sqrt{\frac{2{,}813 \cdot 0{,}33}{0{,}475}}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 4{,}38\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad (6)$$

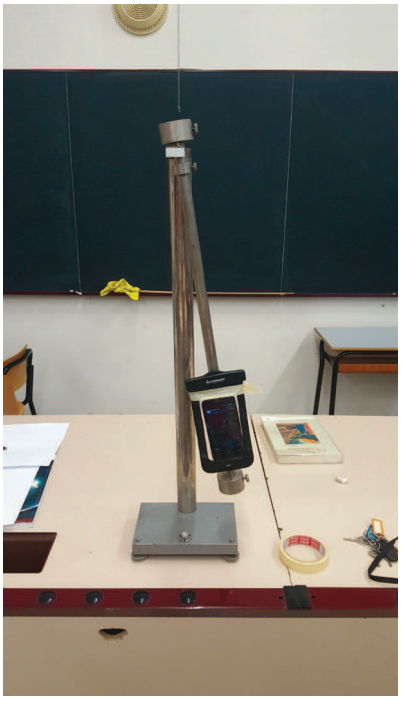


Figura 3. *Setup* del pendolo di Kater.

Questo dato sarà poi confrontato con quello misurato sperimentalmente.

Una volta messo a punto l'esperimento come in fotografia (Figura 3) si procede alla misurazione.

Dopo avere aperto *Sensor Kinetics Pro* (o *Physics Toolbox Suite* o altra *app* con funzionalità similari) si seleziona l'accelerometro e quando si è pronti per eseguire l'esperimento si avvia la raccolta dei dati. Quindi, si mette in oscillazione il pendolo e si osserva il grafico che l'applicazione traccia.

I tre assi lungo i quali viene misurata l'accelerazione dal sensore dello *smartphone* sono indicati e contrassegnati da diversi colori nella Figura 4.

Si può notare che delle misure dei tre sensori di accelerazione corrispondenti alle tre direzioni ortogonali (Figura 5), due, *x* e *y*, registrano un andamento oscillatorio mentre la terza, *z*, rimane sostanzialmente invariata, registrando valori che possono essere considerati a tutti gli effetti rumore di fondo.

Al termine della presa dati, si ferma il sensore e si esportano i dati in un formato leggibile da un *software* di elaborazione dati. Nel nostro esperimento il file è stato esportato in formato .csv in modo da poter essere letto da un foglio di calcolo come *MS Excel* o *Libre Office Calc*.

A questo punto ha inizio la fase di analisi dei dati.

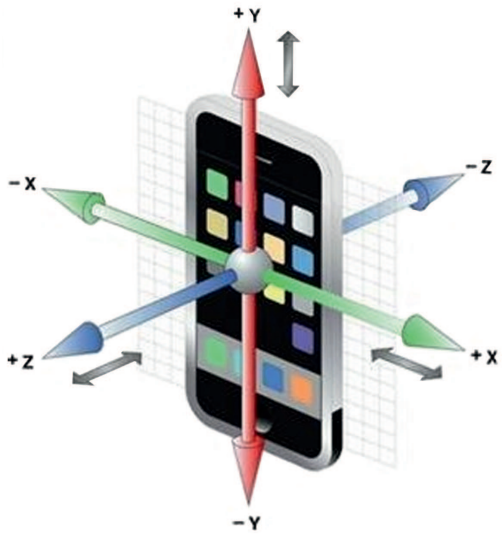


Figura 4. Orientamento degli assi dell'accelerometro in uno *smartphone*.

Inizialmente il file viene importato in un foglio di calcolo e se ne traccia un grafico complessivo del tipo dispersione XY (Figura 5).

Come si può notare dalla figura riportata, i dati confermano quanto osservato sopra in fase di acquisizione:

- Il grafico verde riporta l'accelerazione lungo l'asse *x*, appartenente al piano dello smartphone nella direzione tangente al movimento, pertanto registra l'accelerazione dovuta al moto armonico del pendolo.
- Il grafico riportato in rosso rappresenta l'accelerazione lungo l'asse verticale *y*, che mediamente dovrebbe coincidere con l'accelerazione di gravità (9,8 m/s^2). Essa oscilla in modo regolare registrando l'accelerazione centrifuga dovuta al moto rotatorio dello *smartphone* attorno al fulcro. Tale oscillazione ha frequenza doppia rispetto a quella registrata lungo l'asse *x* dal momento che l'accelerazione centrifuga è sempre diretta in direzione opposta al fulcrodel pendolo (quindi verso il basso rispetto al sensore) qualunque sia il verso del moto oscillatorio.
- Il grafico azzurro rappresenta l'accelerazione lungo l'asse *z*, perpendicolare al piano dello *smartphone*; dal momento che lo *smartphone* non viene accelerato lungo questa direzione, questo grafico ha valore medio nullo e quanto registrato può essere considerato rumore.

Dal grafico dei dati grezzi estraiamo quelli da elaborare e selezioniamo pertanto l'intervallo di tempo in cui sono stati registrati i dati che più sono confacenti ai nostri obiettivi, cioè quelli che evidenziano le oscillazioni più regolari.

Si seleziona l'intervallo fra 2,0 e 12,0 secondi.

Delle tre serie di dati si seleziona solo quella relativa all'asse *x*, riportata in verde sul grafico.

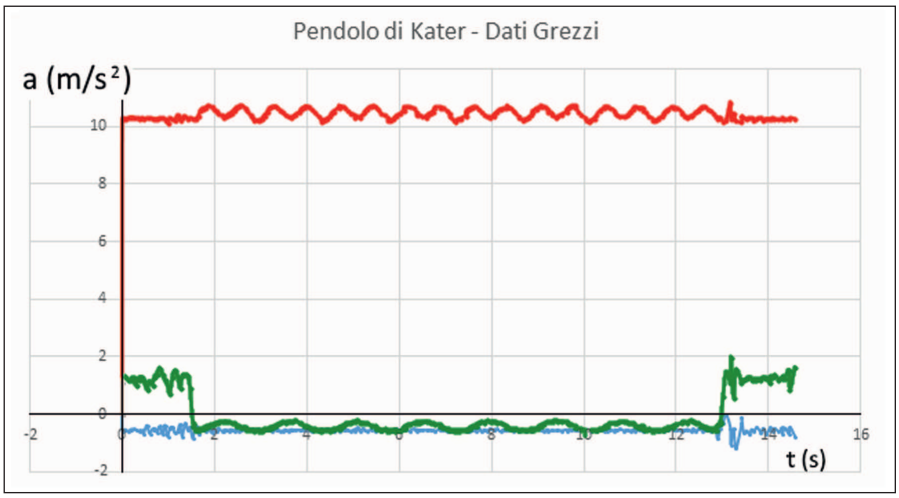


Figura 5. Dati grezzi prelevati dallo *smartphone*.

Si esegue una importazione della serie di dati nel programma adottato per il calcolo del *fit* sinusoidale. Nell'ottica di privilegiare soluzioni gratuite *open source*, si farà riferimento al software *Geogebra*.

Se si utilizza la localizzazione italiana del foglio di calcolo, nell'operazione di copiatura dei dati, abbiate cura di assicurarvi che il separatore decimale sia correttamente impostato sul punto, dal momento che è l'unico separatore ammesso da *Geogebra*. Se il separatore è rappresentato dalla virgola, è necessario modificare il file con un *software* di elaborazione testuale che sostituisca le virgole con i punti.

Una volta che si dispone del file contenente due colonne di dati corrispondenti al tempo e alla accelerazione espressi con il punto decimale, si copiano i dati delle due colonne nel foglio di calcolo di *Geogebra* (l'operazione di copia-incolla avviene senza problemi fra il foglio di calcolo esterno e quello di *Geogebra*). Si selezionano quindi i dati importati.

Una volta selezionati i dati si definisce una lista di punti con l'apposita voce di menu (pulsante Lista → Lista di punti). Una volta definita e dato un nome alla lista (per esempio, "kater"), i punti verranno riportati sul grafico. Visto l'elevato numero di punti e la loro vicinanza, è opportuno non visualizzare le etichette (selezionare i punti dalla finestra Algebra e deselezionare Mostra Etichette dal menu contestuale).

A questo punto di esegue il *fit* sinusoidale digitando la funzione predefinita FitSin(*nome_lista*) nella barra di inserimento (per esempio, FitSin(kater)). La funzione goniometrica interpolante migliore viene riportata nella finestra Algebra e il suo grafico viene riportato in sovrapposizione ai punti nella finestra Grafici.

Come si può notare dal grafico (Figura 6) l'adattamento della curva risulta soddisfacente.

Nella finestra Algebra si può leggere la espressione analitica della funzione calcolata, che nel nostro caso è:

$$f(t) = -0{,}39 + 0{,}16 \sin(4{,}37\ t - 1{,}74) \qquad (7)$$

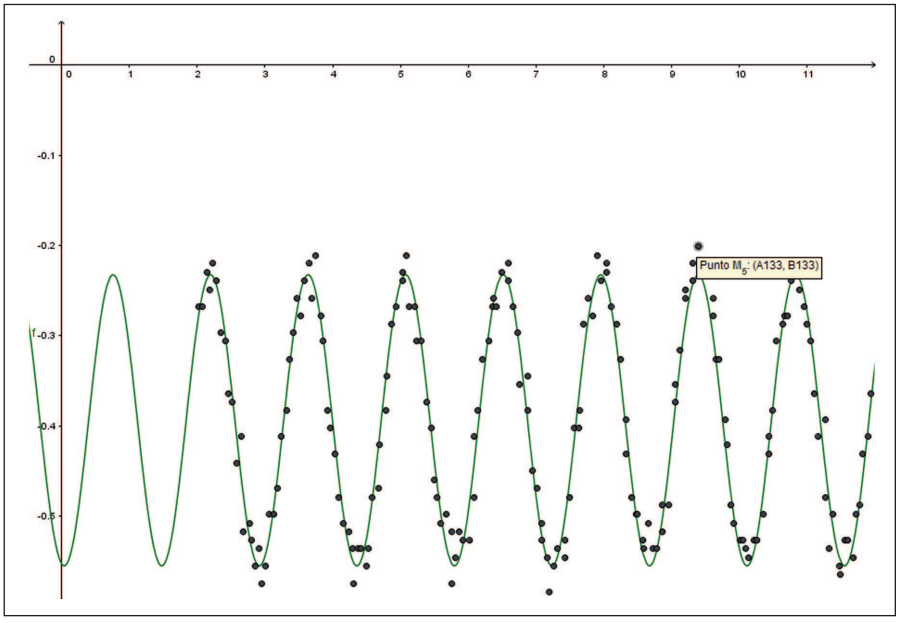


Figura 6. Elaborazione dei dati e *fit* sinusoidale con il *software GeoGebra*.

Il coefficiente di t rappresenta il valore della pulsazione ω, che in precedenza era stato calcolato teoricamente in (6) a partire dai dati sulla massa e sulla geometria del pendolo.

Come si può notare il dato misurato:

$$\omega = 4{,}37 \text{ rad/s} \tag{8}$$

è sorprendentemente in accordo con il dato calcolato (6) in precedenza.

Un'ulteriore misura dell'oscillazione del pendolo di Kater si può eseguire con un sensore a ultrasuoni collegato a un *software* di acquisizione dei dati (per esempio, *Logger Pro*).

In tal caso viene misurata la posizione del pendolo in funzione del tempo (in particolare la distanza fra l'estremità del pendolo e il rilevatore a ultrasuoni).

Il sensore viene posizionato sul piano di oscillazione del pendolo in posizione laterale, all'altezza del punto più basso dell'oscillazione. Preliminarmente occorre calibrare il posizionamento e l'orientamento del sensore in modo che il pendolo venga correttamente individuato e la sua posizione venga correttamente misurata in tutti i punti dell'oscillazione.

Una volta eseguita questa operazione si procede alla presa dei dati.

Nel grafico in Figura 7 viene riportata la posizione del pendolo rilevata a intervalli di tempo di 0,05 s.

Viene quindi eseguito un *fit* dei dati in modo del tutto analogo a quello eseguito in precedenza con i dati prelevati da *smartphone*. Si può utilizzare la funzionalità nativa del *software* di acquisizione dei dati oppure esportare i dati in *GeoGebra* e procedere come illustrato in precedenza.

Il *fit* in questo caso restituisce la funzione:

$$f(t) = 0{,}6 + 0{,}03 \sin(4{,}37\, t + 1{,}42) \tag{9}$$

$$\omega = 4{,}37 \text{ rad/s} \tag{9 bis}$$

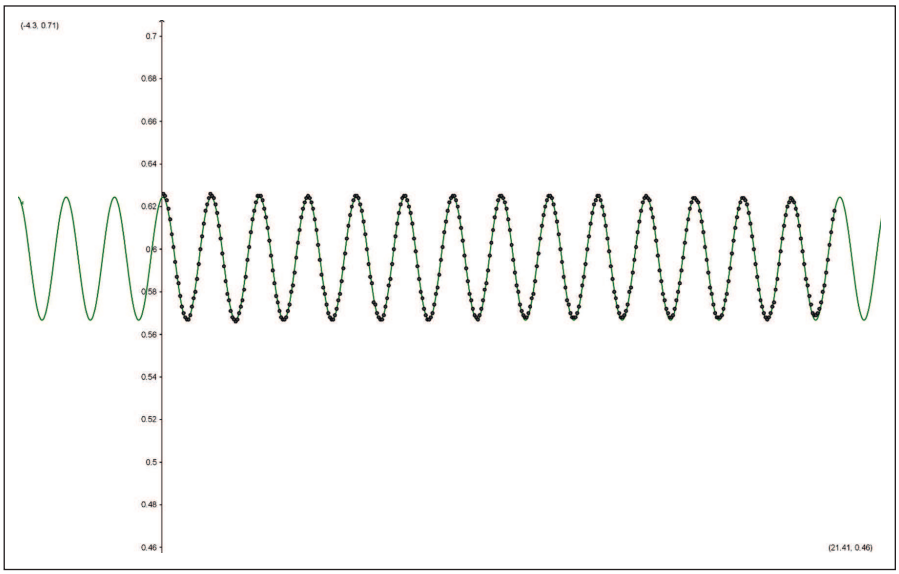


Figura 7. Dati prelevati dal sensore a ultrasuoni e curva di *fit* sinusoidale ottenuta con *GeoGebra*.

Come si può notare la pulsazione ω è del tutto identica a quella ricavata in precedenza nella (8). L'esperimento può proseguire eseguendo le misure variando l'ampiezza delle oscillazioni al fine di dimostrare che essa non influenza il periodo né la pulsazione del moto armonico, giungendo all'enunciazione della legge dell'isocronismo del pendolo.

Si può altresì procedere variando la massa e il momento di inerzia del pendolo per stabilire come questi parametri incidano sul periodo di oscillazione. Questo tipo di misure richiede ovviamente un tempo piuttosto lungo.

Note e storia

L'esperimento trae ispirazione dal progetto *Science Smart Kit*. Tale progetto è stato presentato al 55°congresso nazionale dell'AIF (2016) ed è risultato tra i vincitori del bando del MIUR "Nuove idee per la didattica laboratoriale nei Licei Scientifici". È stato portato a compimento negli anni 2016-17 da un *team* di insegnanti dei Licei "Torricelli-Ballardini" (Faenza), "F.P. di Calboli" (Forlì) e "Fermi" (Alghero). Esso comprende un kit di "accessori" per *smartphone* per realizzare attività di laboratorio di fisica, di scienze, chimica e matematica, schede per studenti e docenti, e ha previsto iniziative di aggiornamento e formazione docenti. Alcuni degli esperimenti del progetto sono disponibili sulla piattaforma "Fare Laboratorio – LS-OSA" all'indirizzo ls-osa.uniroma3.it/.

Il presente esperimento, pur non essendone parte integrante, sfrutta il *know-how* maturato in tale esperienza.

Bibliografia

[1] Vogt, P., Kuhn J., *Analyzing simple pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor, Phys. Teach.* 50, 439 (2012).
[2] Vogt, P., Kuhn J., *Analyzing spring pendulum phenomena with a smart-phone acceleration sensor, Phys. Teach.* 50, 504 (2012).

Sitografia

Si riportano nel seguito gli indirizzi a cui reperire i software utilizzati.

[1] *Physics Toolbox Suite:*
play.google.com/store/apps/details?id=com.chrystianvieyra.physicstoolboxsuite
[2] *Sensor Kinetics Pro:*
play.google.com/store/apps/details?id=com.innoventions.sensorkineticspro
[3] *Geogebra:*
www.geogebra.org/
[4] *Libre Office:*
it.libreoffice.org/
[5] *MS Excel:*
http://www.office.com
[6] *Logger Pro:*
www.vernier.com/products/software/lp/