LEDO STEFANINI
Diploma universitario ingegneria dell'ambiente e delle risorse - Mantova

Scuola di media

(Pervenuto il 9.10.1995, approvato il 25.1.1996)

ABSTRACT
The concept of mean is one of those proposed to students mainly relying on intuition. This paper, which is addressed to teachers, has strictly didactic aimsand, although making progressive generalisations, gives examples from the basics of physics.

Il concetto di media è tra quelli che vengono proposti agli studenti senz'altro supporto concettuale se non quello che deriva dall'intuizione.

Questa poi ha le sue radici nella lunga pratica scolastica di calcolare la media aritmetica dei voti. Il caso vuole poi che la prima media di grandezza fisica che il ragazzo incontra nei suoi studi, e cioè la VELOCITÀ MEDIA, sia appunto la media aritmetica tra la velocità iniziale e quella finale: da cui discende $\frac{1}{2}at^2$. Il concetto si presenta nello studio delle correnti alternate; ma in quest'ambito la media si definisce in modo radicalmente diverso ed ha anche un altro nome: efficace.

Non sarà quindi inutile cercare di puntualizzare le varie accezioni in cui si usa il termine MEDIA.

In questa riflessione, rivolta ad insegnanti, ma che si pone obiettivi strettamente didattici, seguiremo la via della progressiva generalizzazione, accompagnando il discorso con esempi tratti dalla fisica elementare. La quale. nonostante la sua elementarità, si occupa di grandezze che variano con continuità. Questa sua natura propone all'insegnante il problema didattico di maggior rilievo: trattare grandezze continue senza fare ricorso agli strumenti e al linguaggio dell'analisi.

Valori medi di insiemi discreti

La media più semplice è la soluzione del problema seguente:

Dato un insieme di numeri $y_1, y_2, \ldots y_N$, la cui somma indichiamo con $\sum_1^N y_i$, determinare una Y tale che

$$NY = \sum_1^N y_i \qquad (1)$$

Y è la MEDIA ARITMETICA dell'insieme delle y_i.

Determinare un valor medio significa, in buona sostanza, sostituire un'addizione con una moltiplicazione. O anche sostituire ad una moltiplicazione una potenza:

$$Y^N = \prod_1^N y_i \qquad (2)$$

Questa definisce la MEDIA GEOMETRICA.

Una prima generalizzazione è quella di considerare le y come funzione (discreta) di una variabile di x:

$$y_i = f(x_i)$$

Con ciò la (1) diventa

$$NY = \sum_1^N f(x_i)$$

che definisce la media aritmetica delle y. Ma da questa si può ricavare un valore X per la variabile x tale che

$$Nf(X) = \sum_1^N f(x_i) \qquad (3)$$

Questa definisce la MEDIA GENERALIZZATA della variabile x.

Se $f(x) = x$, la (3) si riduce alla media aritmetica delle x.

Se $f(x) = x^2$, la (3) diventa

$$NX^2 = \sum_1^N x_i^2 \qquad (4)$$

e definisce la MEDIA QUADRATICA.

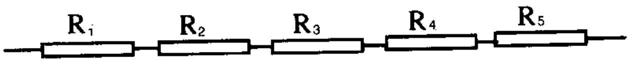
Se $f(x) = \frac{1}{x}$, la (1) diventa

$$N\frac{1}{X} = \sum_1^N \frac{1}{x_1} \qquad (5)$$

che definisce la MEDIA ARMONICA.

Esempi di medie

1. La figura rappresenta N resistori di resistenza R_1, R_2, ... R_N, collegati in serie.

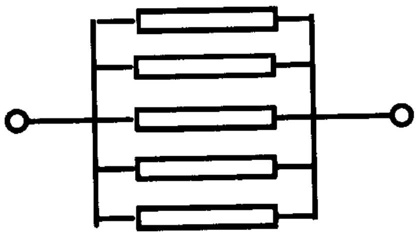


Vogliamo sostituirli con N resistori di eguale resistenza R in modo che la tensione sia la stessa. si richiede che

$$NRI = \Sigma R_i I$$

Si tratta dell'ordinaria MEDIA ARITMETICA.

2. La figura rappresenta gli stessi N resistori collegati in parallelo:

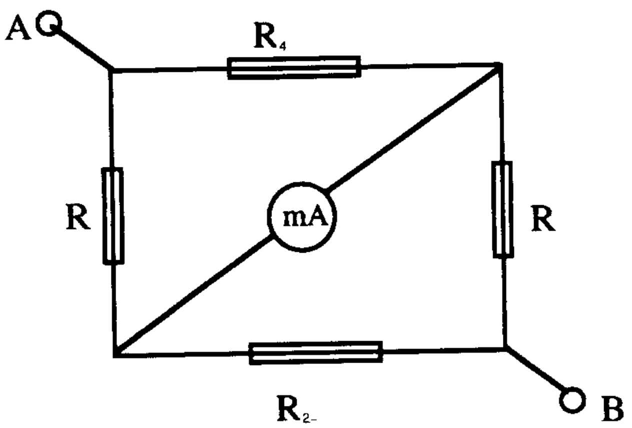


Si vuole sostituire gli N resistori diversi con il parallelo di N resistori di eguale resistenza in modo che la corrente sia la stessa.

$$N\frac{V}{R} = \sum \frac{V}{R_i}$$

Si tratta della MEDIA ARMONICA.

3.



Nel circuito è riconoscibile il Ponte di Wheatstone. La condizione di equilibrio del ponte è

$$R^2 = R_2 R_4$$

cioè che R sia la media geometrica delle altre due resistenze.

4. L'equazione

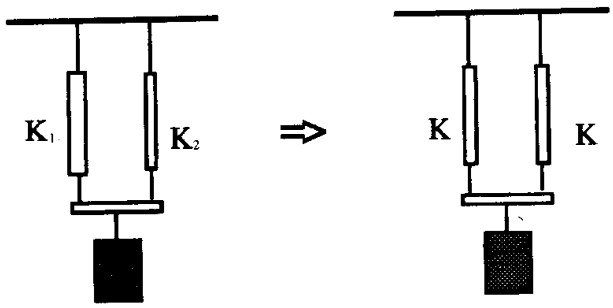
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

mette in relazione le distanze da una lente sottile o da uno specchio curvo di due punti coniuganti. È noto che si può anche scrivere nella forma

$$(p - f)(q - f) = f^2$$

Quindi la focale di uno specchio si può anche definire come la media geometrica delle distanze dal fuoco di due punti coniugati.

5.



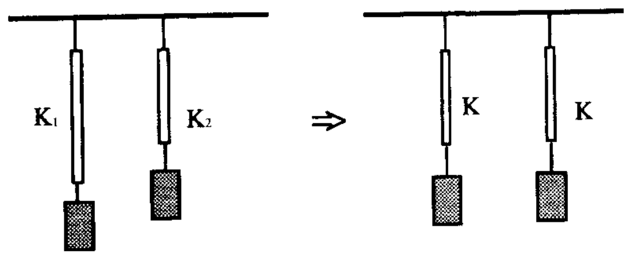
La figura rappresenta due molle, di costanti K_1 e K_2 rispettivamente, collegate "in parallelo". Vogliamo sostituire due molle identiche alle due diverse in modo che, a parità di allungamento, producano la stessa forza.

La forza risultante è la somma delle forze:

$$K_1 \Delta x + K_2 \Delta x = 2K\Delta x$$

La costante di elasticità è la media aritmetica delle due costanti.

6. La figura rappresenta due molle di costanti diverse a cui sono appese due masse uguali.



Vogliamo sostituirle con due molle uguali in modo tale che l'energia contenuta nelle molle sia la stessa.

Si richiede che

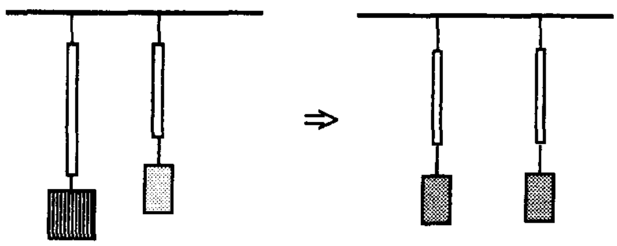
$$\frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K_1} + \frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K_2} = 2\frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K}$$

cioè che

$$\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=\frac{2}{K}$$

La costante media di elasticità dev'essere la media armonica delle costanti.

7. La figura rappresenta due molle identiche alle quali sono appese due masse M_1 ed M_2:



Vogliamo sostituire due masse uguali alle due masse diverse, in modo che l'energia contenuta nelle molle sia la stessa. Dovrà essere

$$\frac{1}{2}K_1\Delta x_1^2+\frac{1}{2}K_1\Delta x_1^2=2\frac{1}{2}K\Delta x^2$$

dove

$$\Delta x=\frac{Mg}{K}$$

Con ciò si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{(M_1g)^2}{K}+\frac{1}{2}\frac{(M_2g)^2}{K}=2\frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K}$$

di cui

$$M=\sqrt{M_1^2+M_2^2}$$

Si tratta di una media quadratica.

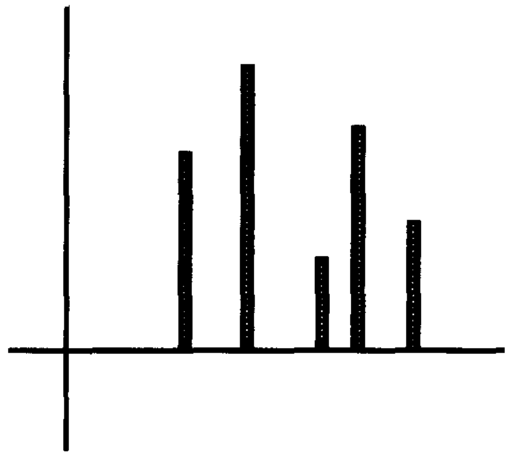
Un caso notevole della (3) è quando $f(x_i) = p_ix_i$ per cui la definizione diventa

$$(\Sigma p_i)X = \Sigma p_ix_i \qquad (7)$$

In questo caso le p_i si chiamano PESI e la (7) definisce la MEDIA ARITMETICA PONDERATA.

8. La figura rappresenta vari pezzi di una barra metallica ordinati lungo un asse.
La posizione del centro di massa è una media aritmetica delle ascisse pesate con le masse:

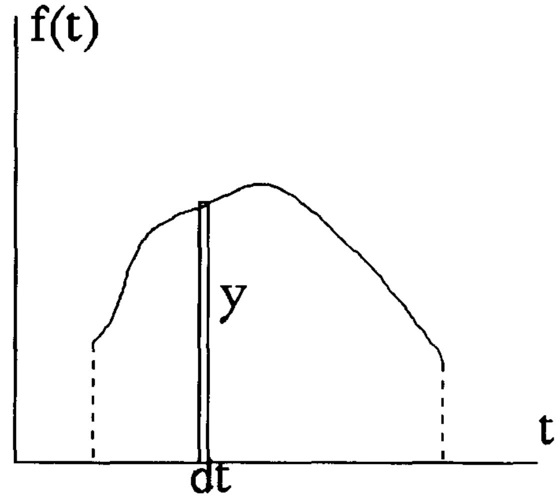
$$X(\Sigma m_i) = \Sigma m_ix_i$$



Valori medi di grandezze continue

Anche in fisica elementare più spesso che con grandezze discrete si ha a che fare con grandezze che variano con continuità. Ad esempio, sia

$$y = f(t)$$



Si definisce la media aritmetica di $f(t)$ assegnando alla variabile y il peso infinitesimo dt:

$$(b-a)Y=\int_a^b y\,dt \qquad (8)$$

9. Calcolare la velocità media rispetto al tempo nel moto di caduta libera.

La grandezza è la velocità che varia linearmente col tempo:

$$v = gt$$

La velocità media rispetto al tempo di caduta è definita da

$$TV_t=\int_0^T v\,dt=\int_0^T gt\,dt=\frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow V_t=\frac{1}{2}gT=\frac{1}{2}V_f$$

Questa coincide con la velocità media definita come il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo.

La velocità media rispetto allo spazio di caduta è definita da

$$HV_S = \int_0^H v\,dx = \int_0^H \sqrt{2gx}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\sqrt{H^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_S = \frac{2}{3}\sqrt{2gH} = \frac{2}{3}V_f$$

La definizione ammette un'ulteriore generalizzazione. La grandezza y è, generalmente, funzione di una grandezza x che, a sua volta, è funzione della variabile t.

10. Vogliamo determinare l'energia cinetica media rispetto al tempo nella caduta libera:

$$ET = \int_0^T E\,dt = \int_0^T \frac{1}{2}m[v(t)]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2}mg^2t^2\,dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}mV_f^2\right)T$$

da cui

$$E = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}mV_f^2\right)$$

Tuttavia se esprimiamo l'energia cinetica media in termini di massa e velocità

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}mV_f^2\right)$$

otteniamo la definizione di una nuova "velocità media" che è

$$V_E = \frac{V_f}{\sqrt{3}}.$$

Possiamo pertanto dare la seguente definizione generale di media di una grandezza x, variabile con continuità in funzione di una grandezza t, in relazione ad una grandezza y:

sia $\qquad y = F(x) \qquad$ con $\qquad x = \varphi(t)$

e t variabile nell'intervallo (a, b). Si chiama *valor medio* di x rispetto alla funzione F e all'intervallo (a, b,) della variabile t, quello definito implicitamente dalla eguaglianza

$$(b-a)F(X) = \int_a^b F(x)dt \qquad (9)$$

11. Valor medio rispetto al tempo dell'intensità di corrente alternata, in relazione alla potenza.

In regime sinusoidale:

$$F(i) = Ri^2$$

$$x = \varphi(t) = i_M sin(\omega t)$$

Sarà quindi

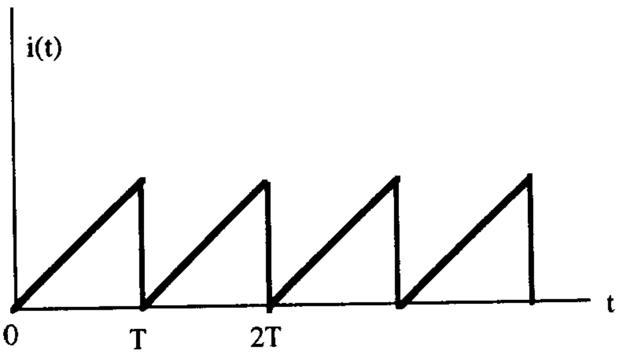
$$TF(\mathrm{I}) = TR\mathrm{I}^2 \int_0^T F(i)dt =$$

$$= \int_0^T Ri_M^2 sin^2(\omega t)dt = \frac{Ri_M^2}{2}T$$

da cui

$$\mathrm{I} = \frac{i_M}{\sqrt{2}}$$

Questa si chiama *valore efficace della corrente*. Facciamo un calcolo analogo per il caso di una corrente a impulsi triangolari:



Ancora

$$F(i) = Ri^2$$

$$x = \varphi(t) = \frac{i_M}{T}t$$

Sostituendo nella (9) si ottiene:

$$TF(\mathrm{I}) = TR\mathrm{I}^2 \int_0^T F(i)dt =$$

$$= \int_0^T R\left(\frac{i_M}{T}\right)^2 t^2 dt = \frac{Ri_M^2}{3}T$$

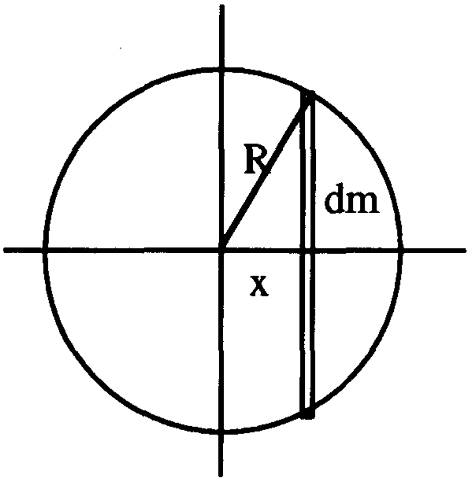
da cui

$$I = \frac{i_M}{\sqrt{3}}.$$

Questo è il valore efficace della corrente nel caso di corrente a dente di sega.

12. Valore medio della distanza rispetto alla massa in relazione al suo quadrato.

Per fissare le idee consideriamo un cerchio di raggio R e spessore omogeneo.



Indichiamo con *dm* la massa infinitesima della striscia tracciata a distanza *x* dal centro. Sarà

$$F(x) = x^2$$
$$x = \varphi(m)$$

con $dm = \sigma 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$ dove σ indica la densità superficiale. La (9) diventa:

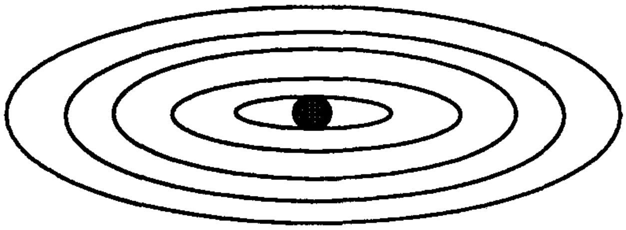
$$X^2 M = X^2 \pi R^2 \sigma =$$
$$= \int_{-R}^{+R} x^2 dm = 2\sigma \int_{-R}^{+R} x^2 \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

L'integrazione conduce a

$$X = \frac{R}{2}$$

questo è il *raggio di girazione* del cerchio rispetto al suo diametro.

13. Consideriamo un pianeta dotato di anelli simili a quelli di Saturno, che assimiliamo ad un disco di raggio R, costituito da materiale incoerente in orbita intorno al pianeta.



Il periodo di rotazione delle particelle dipende dalla distanza x dal pianeta (che supponiamo di dimensioni trascurabili) secondo la terza legge di Keplero:

$$T^2 = Kx^3 \tag{10}$$

Vogliamo determinare il periodo medio rispetto alla distanza dal centro. Vogliamo cioè determinare un valore T tale che

$$TR = \int_0^R T\,dx$$

Sostituendo nell'integrale la precedente espressione di T si ricava

$$T = \frac{\sqrt{K}}{R} \int_0^R x^{3/2} dx = \frac{2}{5}\sqrt{KR^3} = \frac{2}{5} T_{esterno}$$

Analogamente, possiamo calcolare la velocità media rispetto alla distanza, definita da

$$VR = \int_0^R V\,dx$$

Dalla (10) si ricava che

$$V(x) = \frac{2\pi x}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

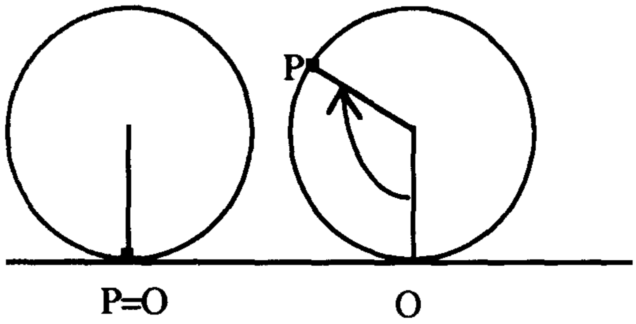
Sostituendola nell'integrale, si ottiene

$$V = \frac{2\pi}{R\sqrt{K}} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \frac{2}{\sqrt{R}} = 2V_{esterna}$$

14. Energia cinetica media rispetto al tempo del pirolino della ruota della bicicletta.

La posizione del pirolino è data da

$$\begin{cases} x = \omega Rt - R\sin(\omega t) \\ y = R - R\cos(\omega t) \end{cases}$$



Derivando si ottengono le componenti della velocità:

$$\begin{cases} x_x = \omega R(1-cos(\omega t)) \\ y_y = \omega R sin(\omega t) \end{cases}$$

da cui

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (\omega R)^2[2 - 2\cos(\omega t)]$$

L'energia cinetica media rispetto al tempo è definita da

$$\frac{1}{2} m V^2 T = m(\omega R)^2 \int_0^T [1 - cos(\omega t)]dt$$

e da qui si ottiene

$$\frac{1}{2} m V^2 = m(\omega R)^2 = mu^2$$

dove u indica la velocità del mozzo della ruota.

Questa permette di definire la velocità media rispetto al tempo in relazione all'energia cinetica.

$$V = u\sqrt{2}.$$

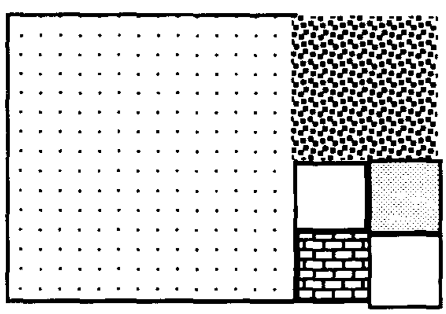
Potremmo chiamarla: VELOCITÀ EFFICACE.

La velocità media del pirolino in relazione alla sua energia cinetica è uguale alla sua velocità media moltiplicata per $\sqrt{2}$.

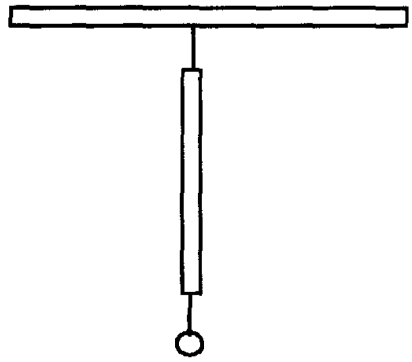
Attività didattiche proposte

1. La figura rappresenta un pavimento piastrellato con mattonelle quadrate di dimensioni diverse. Si vuole sostituirle con mattonelle quadrate di egual lato.

Si ottiene la media quadratica.



2. La figura rappresenta una molla fissata ad un sostegno.



Disponiamo anche di un regolo mediante il quale misurare gli allungamenti della molla.

Se appendiamo una massa M_1 otteniamo un allungamento L_1. Con una massa M_2, un allungamento L_2. Questi verranno assunti come misure delle masse. Determinare, con questi strumenti, due masse uguali tali che, appese insieme producano l'allungamento provocato, insieme, da M_1 ed M_2.

La massa media che si determina in questo modo è la media aritmetica delle due masse.

Riproponiamo il problema fornendo agli studenti, oltre alla molla, al posto del regolo, un cronometro. In questo caso le masse verranno misurate in termini del periodo di oscillazione. Si vuole trovare le due masse uguali che, appese insieme alla molla, oscillano con lo stesso periodo delle masse M_1 ed M_2. La media che si ottiene è la media quadratica.

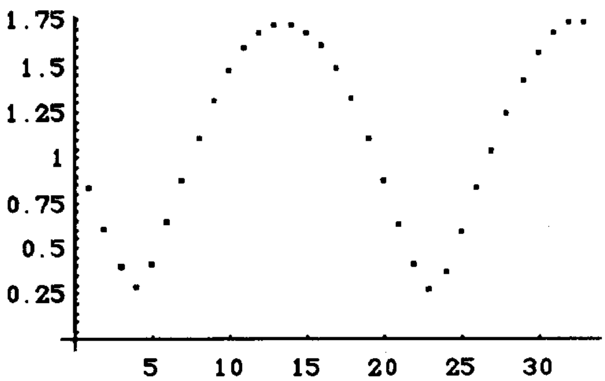
3. La tabella fornisce la distanza del pianeta Venere dalla Terra rilevata dal 1° gennaio del '93 al 1° dicembre del '95.

Data	Distanza (U.A.)	Data	Distanza (U.A.)
1-1-1993	0,819	1-7	1,105
1-2	0,59	1-8	0,867
1-3	0,395	1-9	0,621
1-4	0,282	1-10	0,401
1-5	0,399	1-11	0,271
1-6	0,631	1-12	0,367
1-7	0,871	1-1-1995	0,585
1-8	1,104	1-2	0,82
1-9	1,306	1-3	1,025
1-10	1,465	1-4	1,235
1-11	1,588	1-5	1,413
1-12	1,665	1-6	1,564
1-1-1994	1,706	1-7	1,667
1-2	1,708	1-8	1,723
1-3	1,677	1-9	1,724
1-4	1,601	1-10	1,677
1-5	1,482	1-11	1,588
1-6	1,31	1-12	1,469

La distanza Terra-Venere varia nel tempo a causa del fatto che i due pianeti si muovono su orbite (con buona approssimazione) circolari di raggio 1 U.A. e 0,723 U.A. e con periodi di 365 e 225 giorni, rispettivamente.

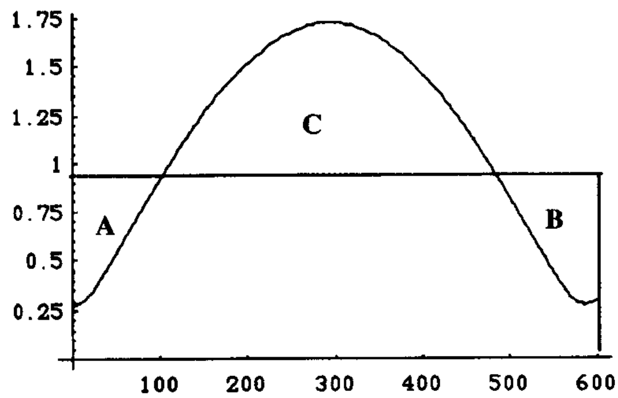
Si proponga agli studenti di determinare la distanza media (nel tempo) di Venere dalla Terra. questo si può fare operando direttamente sul grafico.

DISTANZA DI VENERE



A questo scopo si determina il periodo sinodale (cioè rispetto alla Terra) e l'area della regione delimitata dalla curva e dall'asse dei tempi.

La distanza media rispetto al tempo si determina individuando la parallela all'asse dei tempi che



determina il rettangolo di area eguale all'area delimitata dalla curva e dall'asse dei tempi; tale cioè che sia C = A + B.

Per le classi che abbiano una qualche formazione informatica si può proporre di risolvere il problema mediante l'uso del calcolatore.

Ringraziamenti

Dei primi – salutari – dubbi sulle medie sono debitore all'amico e maestro Maurizio Francesio. Lo spunto per queste riflessioni mi è stato offerto dalla lettura di un lavoro di un discepolo di Federigo Enriques sul glorioso "Periodico di matematiche": Oscar Chisini: "Sul concetto di media", N° 2, 1929.

Nel novembre 1995 ad Atene si è costituita l'Associazione Europea per Educazione all'Astronomia (European Association for Astronomy Education EAAE).
L'Associazione raccoglie insegnanti di 19 paesi europei tutti operanti nelle scuole di ogni ordine e grado.
L'idea di creare un'Associazione Europea nacque nel novembre del 1994 a Garching presso l'Osservatorio Europeo nel corso del Workshop on Teaching of Astronomy in Europe's Secondary Schools dove fu fatto il punto sull'insegnamento dell'Astronomia in Europa.
La delegazione Italiana, costituita da dieci insegnanti dislocati su tutto il territorio nazionale e da un rappresentante ufficiale del Ministero della P.I., ha aderito all'unanimità a tale proposta.
L'EAAE si è ufficialmente costituita in Atene il 25 novembre 1995, dandosi uno Statuto conforme alla normativa europea; la sede è presso l'E.S.O. Garching (Monaco).
Presidente onorario dell'Associazione è R.M. West (ESO). Presidente eletto è D.P. Simuopolus (Atene, Grecia).
L'Associazione deve crescere ed è per questo che chiediamo al Ministro della P.I. di far propria l'iniziativa e di diffonderla in tutte le scuole italiane.
L'Associazione, infatti, si rivolge agli insegnanti che operano direttamente con i giovani, in quanto abbisogna del contributo diretto di chi sul campo si confronta con le problematiche educative ed è in grado di fornire, confrontare, sviluppare idee e progetti finalizzati al miglioramento qualitativo e quantitativo dell'educazione all'Astronomia.
Per informazioni, adesioni e recapito:
Laura Abati - Via Carpagnon, 18 - 36025 Noventa Vicentina (VI), e/o
» » - Dip. di Astronomia dell'Università di Padova - Vc. Osservatorio, 5 - 35122 Padova.