G. MALTESE
*Gruppo Nazionale di Storia della Fisica*
*del C.N.R., Unità di Bologna, Genova, Roma.*
*Centro di Ricerca IBM Italia, Roma.*

**CULTURA**

# Meccanica Quantistica ed evoluzione nei rapporti tra Fisica e Matematica all'inizio del XX secolo

*(Ricevuta II versione il 14.7.89)*

Abstract
The paper deals with a sort of discrepancy between the historical development of Quantum Mechanics and the way it is generally taught. Quantum Mechanics is usually presented after its fundamental postulates, while this is not easy to connect to the real historical evolution of the basic ideas. Nevertheless, an historical perspective of the evolution of Quantum Mechanics can be obtained if we regard it as a fruitful synthetis of Mathematics and Physics in the 1920s. In this way a deep connection can be recognized between the postulate-based Quantum Mechanics and the axiomatization of Mathematics proposed by Hilbert at the beginning of the XX century.

## 1. Introduzione: la Fisica Quantistica tra storia "interna" ed "esterna"

La Storia della Fisica può, secondo le posizioni correnti, privilegiare l'aspetto "interno" od "esterno" della materia. La storia "interna" persegue la ricostruzione dei rapporti causali che portano gli scienziati di una certa epoca da certe premesse a certe conclusioni, attraverso certi passaggi logici. Nel parlare di storia "esterna" si intende, invece, non solo un'analisi del tipo descritto - per quanto, se si vuole, meno rigorosa - ma anche un tentativo costante di connettere gli orientamenti di fondo che emergono dall'analisi con il panorama economico e sociale dell'epoca considerata, nel tentativo di rispondere alla domanda: perché certe teorie si sono sviluppate in un certo momento, in un certo paese ed in un certo contesto storico?

Ambedue le scelte e forse, soprattutto, la seconda, non sono esenti da rischi. Se, da una parte, la ricostruzione pura e semplice dei passaggi attraverso i quali si perviene a certe conclusioni può portare a perdere un'istruttiva visione d'insieme, dall'altra è vero che la ricerca di connessioni tra scienza e contesto storico può dar luogo ad interpretazioni anche molto lontane dalla realtà. La difficoltà si trova nel connettere situazioni che si verificano, per così dire, a "scale" diverse: la comunità scientifica è da una parte strettamente connessa da rapporti interni e dall'altra è più o meno aperta e sensibile a mutamenti nel contesto storico-sociale. La questione è assai spinosa, e l'unica certezza che ho nel parlarne è che non esiste una soluzione generale, ma occorre procedere caso per caso, cercando di separare le connessioni storicamente e causalmente giustificate da quelle non abbastanza sostenute da riscontri oggettivi.

Uno dei casi in cui sono possibili varie ipotesi è quello costituito dalla Meccanica Quantistica, o, meglio, dall'interpretazione dei fatti che ne segnarono la nascita, nel 1925-26. La ricostruzione di questi fatti è stata realizzata in molte e documentate opere (3, 11, 19, 25, 26) e non verrà riproposta qui; mi propongo piuttosto di mettere in evidenza alcuni aspetti inerenti alle trasformazioni della Fisica e della Matematica che in quegli anni contribuirono alla transizione verso la Meccanica Quantistica. In particolare, in questo lavoro viene affrontato il tentativo di riflettere su due aspetti: da una parte su una delle linee evolutive della Matematica, che, dalla connessione tra questioni di algebra e di analisi, portò, nei primi decenni del XX secolo, alla creazione della teoria degli spazi astratti; dall'altra sui rapporti che questa linea evolutiva ebbe con la Fisica Quantistica in termini di contributi di formalismi e di idee. Da questo punto di vista, l'apporto di un centro come Gottinga, per la presenza in quell'epoca di due scuole di Fisica e di Matematica di prim'ordine, acquista particolare rilevanza e merita di essere tenuto in considerazione.

Se si guarda alla storia degli anni che videro nascere la Meccanica Quantistica, non si riescono ad individuare delle tendenze ben definite, che possono essere riconosciute, invece, in una visione retrospettiva d'insieme. È probabilmente per questo che lo studio della materia non viene di solito affrontato secondo la cronologia degli avvenimenti ma, in genere, partendo dalla versione definitiva dei postulati che ne sono alla base, una scelta (non unica) dei quali è rappresentata da quelli che riguardano (23): 1) l'associazione di operatori ad osservabili; 2) i valori che queste possono assumere; 3) la media di tali valori; 4) il significato statistico della funzione d'onda $\psi$. Questo è un postulato che in molti testi viene aggiunto ai primi tre (anche se non è da questi indipendente) a causa del significato fisico non intuitivo della funzione d'onda. Un ultimo postulato riguarda la forma dell'equazione che dà l'evoluzione temporale dello stato di un sistema.

Ora, il postulato 4) è posteriore a gran parte dell'edificio concettuale della Meccanica Quantistica, e addirittura, contribuì all'inclusione in esso della Meccanica Ondulatoria. I postulati 1-2-3 sono estremamente distanti dalle forme iniziali con cui furono enunciate le idee che ne sono alla base. Tuttavia, un'esposizione deduttiva della Meccanica Quantistica è necessaria (15,27), in quanto è questa a contenere la Meccanica Classica come caso particolare, e non viceversa.

D'altra parte, non è possibile aspettarsi linearità e chiarezza nella ricostruzione storica della Teoria dei Quanti che, nel periodo 1918-1925 procedette, per così dire, "a strappi" con la sistematica applicazione a sistemi classici di condizioni di quantizzazione e principio di corrispondenza (l'espressione in (26) è "systematic guessing") per estendere l'ombrello esplicativo della Fisica Classica, prima di decidere di partire dall'approccio opposto.

Bisogna allora rassegnarsi ad una perdita di significato storico per guadagnare in chiarezza di esposizione? Non necessariamente. Pur mantenendo un'esposizione "per postulati", se ne può recuperare una dimensione storica cercando di metterne in luce il rapporto con il panorama della Fisica-Matematica negli anni '20.

A tale scopo mi propongo di far rilevare la connessione che esiste tra esposizione per postulati della Meccanica Quantistica e "teoria assiomatica", introdotta in Matematica da Hilbert. Per inquadrare questo tentativo occorre ricollegarsi a quanto dicevo sopra su storia "interna" e storia "esterna".

È stato ampiamente spiegato (11) come, tra la Meccanica Ondulatoria di Schrodinger, Einstein e De Broglie e la Meccanica delle Matrici di Born, Jordan, Heisenberg chi alla fine prevalse fu la seconda, per dar luogo alla cosiddetta "interpretazione di Gottinga" che inglobò l'altra e, col consistente apporto di Dirac e Von Neumann, contribuì a creare la Meccanica Quantistica nella sua forma definitiva. Il prevalere dell'interpretazione di Gottinga può essere ricondotto a varie cause. Una causa "interna" è che la fisica delle osservabili si rivelò complessivamente un terreno più fertile, dal punto di vista dell'indagine fisica, della fisica delle onde pilota, cui De Broglie tentò invano di fornire un significato reale. Un'altra causa interna è data dalla coesistenza a Gottinga di due scuole di Fisica Teorica e di Fisica Sperimentale aperte alla collaborazione e allo scambio di idee e risultati; è istruttivo a questo proposito vedere i passi delle memorie di Born (3) sulla sua collaborazione col gruppo di J. Franck.

Una causa "esterna" (11) riguarda invece il complesso panorama epistemologico nella Germania degli anni '20. In questa interpretazione, il prevalere della linea indeterminista di Gottinga viene ricondotto all'affermarsi nei fisici di allora di posizioni anticausali ed antideterministe, in contrapposizione al neo-positivismo di fine '800; ciò può essere dovuto (2) alla "sfiducia" nella scienza ufficiale, che non era riuscita a portare la Germania alla vittoria nel conflitto mondiale.

Queste interpretazioni sono fondate e non mutuamente esclusive; tra di loro c'è comunque spazio per ulteriori congetture e motivazioni. Una di queste riguarda i rapporti che in quel periodo fiorirono a Gottinga tra i fisici e la scuola di matematica. Oltre a dei fisici con una cultura matematica fuori del comune (come Born e Jordan), questa scuola dette un cospicuo contributo alla formalizzazione delle connessioni tra algebra ed analisi che avevano cominciato ad essere note agli scienziati fin dall'epoca di D. Bernoulli, e che costituirono fertile terreno di indagine per i matematici del XIX secolo.

In questo lavoro considererò le interazioni tra i fisici e la scuola di matematica di Gottinga come un fattore importante nell'affermazione dell'interpretazione della Meccanica Quantistica che avrebbe preso nome da quella università e, più in generale, nella connessione tra Meccanica Quantistica e "teoria assiomatica", cui mi riferivo prima. Questo è indispensabile sia per chiarire la genesi dei contenuti di un'esposizione per postulati che per seguire l'ulteriore evoluzione storica, che, dalla creazione della Meccanica Quantistica, portò alla sistematizzazione matematica di questa, da parte di Von Neumann. Senza la pretesa di una trattazione specialistica, per cui si rimanda alla vastissima letteratura, l'intento è di contribuire a saldare l'esposizione cronologica della genesi della Meccanica Quantistica con l'esposizione retrospettiva per postulati cui si accennava prima.

## 2. Evoluzione della Meccanica e filoni storici in Fisica Quantistica

Dopo l'opera di Newton, nei secoli XVIII e XIX la Meccanica subì successive formalizzazioni, ad opera principalmente di Lagrange, Hamilton, Jacobi.

Questo processo non aggiunse granché di fisico ma dette alla Meccanica una veste matematica sufficientemente astratta e formale da permettere di cogliere analogie con altri contesti e di trasportarvi certe considerazioni ed assunzioni. Solo per motivi di chiarezza mi uniformerò alla tendenza generale, ancorché impropria (25), chiamando "classica" questa Meccanica.

Alle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

(dove k va da 1 a n) si può giungere dalla II legge di Newton in due modi, attraverso un principio differenziale od integrale (16). Il principio differenziale è quello di D'Alembert, forma dinamica del principio dei lavori virtuali; il principio integrale è quello di Hamilton, secondo il quale il moto di un sistema descritto da una Lagrangiana L tra gli istanti $t_1$ e $t_2$ è tale per cui l'integrale $\int_{t1}^{t2} L dt$ abbia un estremo in corrispondenza della traiettoria del moto. Una esposizione della Meccanica in termini di principi variazionali presenta il vantaggio dell'indipendenza dal particolare sistema di coordinate. Nelle equazioni di Lagrange si introducono le coordinate "generalizzate" o "lagrangiane" q, in numero n pari a quello dei gradi di libertà del sistema: se esso è formato da N punti materiali con K reazioni di vincolo, allora n = 3N - K. Inoltre, le quantità $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ sono i momenti p coniugati alle coordinate q. Le (2-1) sono un sistema di n equazioni differenziali del II ordine; alternativamente, una descrizione del moto con un sistema di 2n equazioni di I ordine si può avere usando le q e le p come coordinate (equazioni canoniche).

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \; ; \; \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (2\text{-}2)$$

dove k va da 1 a n. H è l'Hamiltoniana del sistema. Vale $\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}$, ovvero, se L non dipende esplicitamente dal tempo, H è una costante del moto. Inoltre, per sistemi in cui le relazioni di trasformazione da coordinate cartesiane a lagrangiane non contengono esplicitamente il tempo, H si identifica con l'energia del sistema. Si dice canonica una trasformazione che fa passare da coordinate q,p a coordinate Q,P per cui esiste una funzione K tale che le (2-2) valgono ancora, con K al posto di H. La funzione che fa passare dalle vecchie alle nuove coordinate si chiama "funzione generatrice della trasformazione". Oltre che dal tempo, essa dipende da due dei quattro insiemi di variabili q,p,Q,P. Se dipende dalle q e dalle P, convenzionalmente si indica con S (v. dopo).

Tra le grandezze invarianti per trasformazioni canoniche, particolare importanza hanno le parentesi di Poisson (16), mediante le quali si possono riscrivere le (2-2):

$$\{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \; ; \; \{p_k, H\} = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (2\text{-}3)$$

Si può cercare la trasformazione canonica particolare che porti a coordinate e momenti costanti. Ciò porta a risolvere l'equazione alle derivate parziali del I ordine nelle n+1 incognite $q_1 \dots q_n$, $t$.

$$H\left(q_1 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2\text{-}4)$$

La (2-4) è l'equazione di Hamilton-Jacobi; S è la funzione principale di Hamilton ed è del tipo $S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n, t)$ con $\alpha_1 \dots \alpha_n$ costanti arbitrarie. Se H non dipende esplicitamente da t, la funzione generatrice da cercare è W = W(q,p) dove W è la funzione caratteristica di Hamilton. Essa genera una trasformazione in cui tutti i nuovi momenti sono costanti.

Per sistemi periodici, risulta particolarmente utile usare il formalismo delle variabili azione-angolo (4,9,16). Limitandosi ai sistemi in cui H è separabile, si possono prendere come nuovi momenti costanti le variabili d'azione, definiti dalla:

$$J_i = \oint p_i dq_i \qquad (2\text{-}5)$$

dove l'integrale è esteso ad un periodo. Le coordinate coniugate dalle $J_i$ sono le $w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$, per cui vale $w_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = v_i$ cosicché $w_i = v_i t + \beta_i$, dove le $v_i$ sono costanti dipendenti dalle $J_i$. L'utilità del formalismo sta nell'interpretazione che si può dare alle $v_i$ (esse sono le frequenze associate al moto periodico delle $q_i$) e nel fatto che per calcolarle non è necessario risolvere completamente il problema. La (2-5) ha un posto di rilievo nel quadro dei rapporti Meccanica Classica - Fisica Quantistica. Generalizzando infatti le idee di Bohr, tra il 1915 e il 1916 Sommerfeld propose, per la quantizzazione delle orbite atomiche:

$$\oint p_k dq_k = n_k h \qquad (2\text{-}6)$$

dove h è la costante di Planck e l'integrale è esteso ad un'orbita. La (2-6) è una relazione fondamentale nella "vecchia teoria dei quanti", una teoria che si sviluppò euristicamente, presupponendo lo studio di un sistema in termini classici, e imponendo poi delle restrizioni sui moti permessi sotto forma di condizioni di quantizzazione (11). Si trovò infatti che la loro formulazione era particolarmente semplice in termini di variabili d'azione, poiché le $J_i$, in quanto invarianti adiabatici, sono quantizzabili. Bastava risolvere il problema nel modo classico e sostituire poi alle $J_i$ dei multipli interi di h. In seguito, quando divenne palese l'inadeguatezza della vecchia teoria dei quanti, il metodo delle variabili azione-angolo tornò ad essere esclusivo appannaggio dell'astronomia, da cui era stato preso.

Le enunciazioni della Meccanica contenute nelle (2-3) e (2-4) furono assai fertili nell'ispirare gli autori della Fisica Quantistica (16).

La (2-3) enuncia la Meccanica in termini di parentesi di Poisson. Essa è connessa alla Meccanica delle Matrici di Born-Heisenberg-Jordan e all'algebra di Dirac dei q-numeri. Questo filone va sotto il nome di "fisica delle osservabili", nacque a Gottinga e trasse origine dalla esigenza di fondo di costruire una teoria che facesse uso solo di grandezze misurabili direttamente; a sua volta, l'esigenza era nata dall'insufficienza della vecchia teoria dei Quanti, che pretendeva di introdurre concetti "macroscopici" quali quello di orbita in un contesto "microscopico" come quello atomico, in cui non ha senso parlare di orbite ed altre grandezze classiche non misurabili. Di questa esigenza ben si rendevano conto coloro che dettero vita alla Meccanica Quantistica, che avevano studiato i quanti secondo i principi della "vecchia" teoria, esposti ad esempio nel libro di Sommerfeld "Atombau und Spektrallinien".

Come è noto (29,19,11,3) fu Heisenberg, nel luglio del 1925, a sottoporre a Born il manoscritto di un lavoro in cui per la prima volta compariva un formalismo con delle regole di calcolo per le "osservabili" (18), come le frequenze delle righe associate alle transizioni atomiche. Born riconobbe nel formalismo le regole dell'algebra matriciale, che (3) aveva già studiato a Breslavia, e, nel breve volgere di qualche mese fu messo a punto il "lavoro dei tre uomini" (Born, Heisenberg, Jordan; articolo n. 15 in (26)), che costituì il manifesto della Meccanica delle Matrici.

I "tre uomini" rimpiazzarono la (2-6) con la condizione di quantizzazione

$$qp - pq = i\hbar I \qquad (2\text{-}7)$$

dove ora q e p sono le matrici associate alle coordinate q e p, I è la matrice identità e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Sempre durante l'estate del 1925 il fisico inglese P.A.M. Dirac cominciò ad interessarsi alle idee di Heisenberg, e, perseguendo il fine di generare un'algebra per le grandezze quantum-teoriche, giunse a generalizzare la (2-7) ponendo (art. 14 e 17 in (26)):

$$fg - gf = i\hbar\,[f,g] \qquad (2\text{-}8)$$

Ovvero, nel limite classico (21), il commutatore delle grandezze quantistiche f e g è proporzionale alla parentesi di Poisson delle grandezze classiche corrispondenti.

Il "lavoro dei tre uomini" giunse fino alla teoria della trasformazione: la risoluzione di un problema quantistico veniva legata alla ricerca di una matrice S tale che la trasformazione $SHS^{-1}$ rendesse diagonale la matrice associata all'Hamiltoniana del sistema. A tale risultato Born e Jordan giunsero sfruttando quanto era già noto sulle forme hermitiane dai lavori di Hilbert sulle equazioni integrali. Il capitolo 3 del lavoro (in massima parte opera di Born) è dedicato ai rapporti tra la teoria della trasformazione e quella degli autovalori delle forme hermitiane limitate, esprimendo peraltro la convinzione che i risultati si applichino anche alle forme non limitate. Ciò sarebbe stato mostrato in seguito da Von Neumann, nell'ambito della teoria degli operatori non-limitati negli spazi di Hilbert.

Fin qui si sono visti i primi accenni ai rapporti tra la Matematica dei primi anni del secolo e i fisici che misero a punto la Teoria dei Quanti; prima di riprendere questo tema è necessario completare la panoramica dei filoni storici "quantistici" con la Meccanica Ondulatoria di Schrodinger.

L'idea di associare al moto delle particelle materiali di un gas i modi normali di vibrazione di un sistema di onde di materia era giunta a Schrodinger dai lavori di De Broglie, attraverso i giudizi positivi espressi su questi da Einstein (17). Nel primo semestre del 1926 egli pubblicò cinque comunicazioni, quattro delle quali dal titolo "La quantizzazione come problema degli autovalori" e la quinta "Sui rapporti tra la Meccanica Quantistica di Born-Heisenberg-Jordan e la mia". In esse egli ricavò l'equazione che porta il suo nome in due modi: a partire da un principio variazionale e sviluppando l'idea di considerare la Meccanica Classica come il caso limite di una Meccanica Ondulatoria, così come l'Ottica Geometrica sta all'Ottica Ondulatoria. In quest'ultimo caso sviluppò estesamente il formalismo di Hamilton-Jacobi della (2-4) (11,25). In ambedue i casi cercò di ricondurre le condizioni di quantizzazione ad uno schema classico, sostituendole con un principio variazionale, od identificandole con lo spettro discreto di un autovalori di un opportuno problema di Sturm - Liouville. Anche Schrodinger attinse alla matematica di Gottinga, nella persona del matematico Weyl, che, formatosi alla scuola di Gottinga, successe a Hilbert nel 1930; impiegò inoltre spesso nei suoi articoli i metodi del trattato di Courant e Hilbert "metodi matematici della Fisica", pubblicato nel 1924 e destinato ad essere un punto di riferimento costante per i fisici di quell'epoca. In particolare, Schrodinger riconobbe nella sua equazione un caso particolare di quel tipo di problemi detti di Sturm - Liouville; ciò si rivelò utile quando, nel lavoro citato, dimostrò (v. paragrafo successivo) l'equivalenza formale tra Meccanica Ondulatoria e Meccanica delle Matrici.

Paradossalmente, la dimostrazione di questa equivalenza non conferì autonomia alla Meccanica Ondulatoria, ma ne affrettò l'inglobamento da parte della Meccanica delle Matrici, che si può considerare completato con le linee di tendenza emerse dal congresso Solvay dell'ottobre 1927. Tra i fattori che condussero a ciò ha un posto di rilievo l'inadeguatezza della teoria di Schrodinger nella interpretazione della funzione d'onda $\psi$, cioè di "cosa realmente oscillasse" nell'equazione delle onde: Schrodinger continuò invano a cercare dei significati fisici reali. L'interpretazione statistica di Born del 1926 contribuì certamente all'affermazione dell'interpetazione di Gottinga: oltre a questo motivo, come già detto, possono venire addotte altre cause basate ad esempio sul particolare panorama epistemologico della Germania degli anni '20. Nei prossimi paragrafi proverò a riconoscere un ulteriore importante motivo nel migliore e più completo uso che i fisici di Gottinga fecero di alcuni dei contesti matematici di allora, di cui cercherò tra poco di tracciare un profilo.

### 3. Dai sistemi oscillari agli spazi astratti

È stato mostrato in sintesi come le ipotesi iniziali in Meccanica delle Matrici ed in Meccanica Ondulatoria siano state, dal punto di vista fisico-matematico, l'associazione di matrici alle osservabili e la riproduzione delle condizioni di quantizzazione mediante condizioni al contorno imposte ad un'opportuna equazione differenziale. L'equivalenza tra i due metodi fu mostrata osservando che l'equazione differenziale della funzione d'onda $\psi$ può essere considerata come l'equazione agli autovalori di un operatore differenziale, di cui può essere ricavata una rappresentazione matriciale servendosi di un sistema ortonormale e completo di funzioni. Se tale sistema è proprio quello delle autofunzioni della equazione differenziale, la matrice associata all'operatore è diagonale.

È interessante mettere in luce come queste ipotesi furono tratte da un filone evolutivo della Fisica-Matematica che, partendo da questioni di analisi apparentemente assai diverse, portò a connetterle a questioni di algebra lineare, per dare vita, nei primi decenni del XX secolo, alla teoria degli spazi astratti. Poiché la Meccanica Quantistica trovò la definitiva sistemazione matematica nell'ambito di tale teoria, mi pare importante ricostruirne la genesi per sommi capi.

Si devono a D. Bernoulli (1700-1782) le prime generalizzazioni nella teoria dei sistemi oscillanti (5). Egli considerò il problema della corda vibrante come il caso limite di un'oscillazione di un sistema di N masse puntiformi (a sua volta connesso al problema agli autovalori di una matrice NxN), all'aumentare di N. D. Bernoulli enunciò inoltre un primordiale principio di sovrapposizione, asserendo che la più generale oscillazione della corda era esprimimbile come sovrapposizione di oscillazioni proprie.

Oltre alle funzioni trigonometriche, fin dal XVIII secolo erano conosciuti altri sistemi di funzioni (p. es. i polinomi di Legendre, noti dal 1785) in cui potevano essere sviluppate le soluzioni di certe equazioni differenziali. Verso il 1830 i risultati allora noti vennero sistematizzati da due matematici francesi, Charles Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882). Essi costruirono una teoria generale delle oscillazioni per funzioni di una variabile, osservando che nello studio di sistemi oscillanti, la tecnica di separazione delle variabili porta spesso a risolvere equazioni del tipo:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)y(x) - q(x)\,y(x) + \lambda\varrho(x)\,y(x) = 0 \tag{3-1}$$

dove p, y, $\varrho$, q sono definite nell'intervallo (a,b). p e $\varrho$ sono definite positive in (a,b); $\varrho$ è inoltre spesso chiamata funzione "peso" o funzione "densità". La (3-1) ha inoltre certe condizioni al contorno, che, assieme alla forma delle p, q, $\varrho$ caratterizzano lo specifico "problema di Sturm-Liouville" (1,6,8,23,24). Gli autori mostrarono che la (3-1) ha soluzioni diverse da 0 in (a,b) solo se $\lambda$ assume uno dei valori di una successione di numeri interi, il cui termine generale tende ad infinito. Essi dimostrarono inoltre l'ortogonalità delle soluzioni (anche se la parola "ortogonale" in questo contesto fu usata da Hilbert per la prima volta) ed il fatto che una funzione f(x) continua in (a,b) assieme alle sue derivate prime e seconde (che possono essere anche solo continue a tratti) e che soddisfi le condizioni al contorno del problema è sviluppabile nella serie uniformemente ed assolutamente convergente

$$f(x) = \sum_n c_n y_n(x)\ ;\ c_n = \int_a^b \varrho f y_n dx \tag{3-2}$$

Le $y_n$ costituiscono un insieme *completo* di funzioni, che è anche *ortonormale* se le $y_n$ sono normalizzate. Vale inoltre

$$\int_a^b \varrho f^2 dx = \sum_n c_n^2 \tag{3-3}$$

che è l'uguaglianza di Parseval, dimostrata per la prima volta nel 1799.

Un cinquantina di anni dopo, questi risultati furono completati da Gram, il quale mise in luce la relazione tra sviluppo in serie di funzioni ortogonali e problema della migliore approssimazione quadratica, nato dai "minimi quadrati" di Gauss. Egli studiò poi sistemi ortonormali infiniti, per i quali mostrò che la proprietà di completezza implica:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|f - \sum_i^n c_i y_i\right|^2 dx = 0 \tag{3-4}$$

ovvero la convergenza in media della serie $\sum c_n y_n$ alla funzione f(x). Come detto, i sistemi di funzioni soluzione di un problema di Sturm-Liouville sono completi. Inoltre, (3-2) è un risultato assai più forte di (3-4): la completezza di un sistema di funzioni è condizione necessaria ma non sufficiente per la (3-2), essendo sufficiente solo per la convergenza in media data dalla (3-4) (6,8,23). Se però la serie (3-2) converge uniformemente, allora la (3-4) implica la (3-2). Infine la (3-3) non è che il caso particolare, valido per sistemi completi, della disuguaglianza di Bessel (1828):

$$\int_a^b \varrho f^2 \, dx \leq \sum_n c_n^2 \qquad (3\text{-}5)$$

valida per tutti i sistemi ortonormali.

Nella II metà del XIX secolo lo sforzo degli analisti fu volto ad estendere la teoria ai problemi di Sturm-Liouville relativi alle funzioni di più variabili, cui in particolare conduceva lo studio di equazioni differenziali di tipo ellittico, come quella delle membrane vibranti.

Ponendo $\varrho \equiv 1$ (nella 3-1) (cosa che si può sempre fare ridefinendo y), si vede che la (3-1) è l'equazione agli autovalori dell'operatore differenziale $L = q - d/dx(pd/dx)$, che è hermitiano se vale (6):

$$p\,[f^x g \cdot f g^x\,]\Big]_a^b = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

dove f e g sono funzioni complesse di variabile reale, due volte differenziabili in (a,b) e il simbolo x indica la complessa coniugazione.

Ora, nella teoria di Sturm-Liouville, hanno particolare importanza i problemi singolari, in cui nella (3-1) l'intervallo di definizione è illimitato o le funzioni che p, q, $\varrho$ hanno delle singolarità agli estremi. In tale ambito, per determinare la completezza del sistema di autofunzioni, occorre procedere caso per caso, non essendo più questa assicurata in generale; le condizioni ai limiti (3-6) vanno sostituite da condizioni sui comportamenti asintotici. Nella Meccanica Ondulatoria esistono numerosi ed interessanti esempi di problemi di Sturm-Liouville singolari: basti pensare all'oscillatore armonico (collegato ai polinomi di Hermite), al problema della ricerca delle autofunzioni del momento angolare (collegato ai polinomi di Legendre) e, infine, alla parte radiale dell'equazione dell'atomo di idrogeno, in cui compaiono i polinomi di Laguerre (1,7,23). Le autofunzioni di questi problemi costituiscono tre insiemi di funzioni ortogonali e completi. Nello studio dei rapporti tra Meccanica e Ondulatoria e Meccanica delle Matrici, Schrodinger associò opportuni operatori a delle grandezze fisiche, giungendo poi a riconoscere nella sua equazione l'equazione agli autovalori dell'operatore H, associato all'Hamiltoniana del sistema. In particolare egli associò al momento p l'operatore $- i\hbar d/dx$, riuscendo così in una connessione che pochi mesi prima (inverno 1925-26) Born e Wigner avevano fallito (3,19). L'equivalenza formale tra Meccanica Ondulatoria e Meccanica delle Matrici fu dimostrata associando all'operatore hermitiano A nel sistema completo di funzioni $\psi_i$ la rappresentazione matriciale $A_{nm} = \int_a^b \psi_n^x A \psi_m \, dx$. È chiaro che se le $\psi_i$ sono le autofunzioni di A, la matrice associata ad A è diagonale ed ha per elementi gli autovalori di A. Se A è l'operatore hamiltoniano, la rappresentazione nell'insieme delle sue autofunzioni risolve il problema quantistico.

Altri filoni che contribuirono a saldare i rapporti tra analisi ed algebra lineare furono la teoria delle equazioni integrali lineari ed il calcolo delle variazioni. Per quanto riguarda la prima, Hilbert vi si dedicò assiduamente, giungendo a dimostrare nel 1906 che risolvere una equazione integrale lineare di Fredholm è equivalente a risolvere un sistema lineare ad infinite equazioni, per cui sia valida la condizione $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty$, dove le $x_p$ sono le incognite. Per quanto riguarda il calcolo delle variazioni, è nota la sua connessione con le equazioni differenziali (messa in luce da Eulero): la equazione generale dei problemi di Sturm-Liouville (3-1) ha, ad esempio, un immediato corrispettivo variazionale.

Ecco dunque che lo spazio delle successioni dei numeri reali $x_n$ tali che $\sum x_n^2 < \infty$ (in stretta connessione con lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile) cominciò, a partire dai primi anni del secolo a costituire la base di varie branche dell'analisi (5), rappresentando una sorta di "passaggio al limite" dallo spazio euclideo. Tutto era dunque pronto per una generalizzazione che partendo dalla "teoria assiomatica" di Hilbert (13) avrebbe portato, nei primi decenni del secolo, alla teoria degli spazi astratti, in cui la Meccanica Quantistica trovò la definitiva formalizzazione. Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni aspetti di questo processo di generalizzazione e del ruolo che vi ebbe Gottinga.

## 4. Perché a Gottinga? La Meccanica Quantistica come sintesi dell'evoluzione nei rapporti tra Fisica e Matematica

Dopo la dimostrazione da parte di Schrodinger nella primavera del 1926 dell'equivalenza formale di Meccanica Ondulatoria e Meccanica delle Matrici, l'evoluzione della nuova fisica fu assai rapida. L'interpretazione statistica delle funzioni d'onda data da Born fu inglobata da Jordan in una impostazione assiomatica della Meccanica Quantistica cui, tra il 1926 e il 1927 l'ambiente matematico di Gottinga, nelle persone di Hilbert, Nordheim e Von Neumann, conferì una sistemazione matematica rigorosa, precisando i concetti di stato e di osservabile, e formulando la teoria nell'ambito degli spazi di Hilbert. Heisenberg espose il principio di indeterminazione che costituì uno dei temi centrali della relazione presentata da lui e da Born al Congresso Solvay nell'ottobre del 1927. Il punto di vista "indeterminista" di Gottinga venne accolto dalla comunità scientifica molto più favorevolmente delle teorie ondulatorie di De Broglie e Schrodinger. Infine, la base matematica della Meccanica Quantistica fu definitivamente assiomatizzata da Von Neumann nel 1932.

Dopo la fine degli anni '20, solo l'interpretazione di Gottinga contribuì ad informare la ricerca in Fisica Atomica. Si è già accennato come ciò possa essere collegato ad interpretazioni "esterne" od "interne": tra queste mi sembra che debba trovare posto quella che attribuisce il successo dell'interpretazione di Gottinga alla superiore base matematica di cui poterono disporre gli autori.

In (3) si trova un ampio resoconto dei rapporti dell'autore con Hilbert, da studente prima e da assistente poi; viene in particolare posto l'accento sull'utilità che ebbero, per la creazione della Meccanica Quantistica, alcuni argomenti sulla teoria di Hamilton-Jacobi e di analisi funzionale che, sebbene nuovissimi e, per così dire, ancora in gestazione nella sua mente, Hilbert includeva nelle lezioni. Oltre a Born la scuola di Fisica di Gottinga potè contare su di un altro esponente di elevatissima preparazione matematica nella persona di Pascual Jordan. Insieme a Born egli sostenne l'intuito fisico di Heisenberg, il quale "non sapeva nemmeno cosa fosse una matrice" (3) alll'epoca del suo fondamentale lavoro del 1925.

Più in generale, l'impostazione assiomatica data alla Meccanica Quantistica da Hilbert, Nordheim e Von Neumann, risente fortemente della veste assiomatica data da Hilbert alla Matematica. Il manifesto di questa tendenza di pensiero è nei "Fondamenti di Geometria", pubblicati da Hilbert nel 1899. Definito un ente matematico mediante assiomi (12), una teoria risulta essere un complesso di teoremi, dedotti dagli assiomi. La costruzione di teorie su basi assiomatiche permette, secondo Hilbert, il completo svincolamento da quei rami della matematica che ne hanno suggerito l'adozione, ed apre orizzonti esplicativi di vastità mai raggiunta prima. Anche questo (13) può essere ricondotto ad un'interpretazione "esterna", nel senso che un'impostazione assiomatica della scienza era necessaria per conferirle maggiore flessibilità e rapidità di intervento in un'epoca come quella della transizione da XIX a XX secolo in cui la scienza fu protagonista essenziale dell'enorme sviluppo industriale e tecnologico. L'introduzione della teoria assiomatica contribuì a mettere in discussione la concezione unitaria della scienza ottocentesca (12). Di fatto essa fu uno degli elementi nel quadro del dualismo tra teorie riduzioniste e teorie dei principi. Significativo fu il rifiuto delle teorie relativistiche da parte di Poincarè, il quale tentò di ridurle allo schema dell'elettrodinamica di Lorentz. H. Poincarè era avversario dal punto di vista assiomatico, di cui paventava la capacità di spezzare l'unità della Fisica in tanti settori di ricerca separati. Alla luce degli eventi dei decenni successivi, questo timore si sarebbe rivelato infondato.

Nell'ambito dell'analisi, il settore dove la concezione assiomatica esercitò il maggiore influsso è quello dell'analisi funzionale, nata dalle idee di Hilbert, Riesz e Frechet nei primi anni del secolo. Algebra lineare, equazioni differenziali lineari, calcolo delle variazioni ed equazioni integrali lineari sono i rami dell'analisi in cui vennero identificati dei caratteri comuni che portarono ad un approccio astratto. In tale approccio si parte da un insieme di elementi - di natura non specificata - che soddisfano certi assiomi: al variare di questi variano gli spazi astratti con cui si ha a che fare (spazi di Hilbert, di Banach, metrici) (20). In una sintesi molto rozza si può dire che uno spazio metrico è caratterizzato da una funzione che associa una distanza ad ogni coppia di elementi dello spazio. Uno spazio vettoriale è un insieme di elementi su cui sono definite le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare; uno spazio normato è uno spazio vettoriale con una metrica costituita da una norma. Fin qui sugli elementi dello spazio è possibile compiere solo le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare. Il prodotto tra elementi dello spazio viene introdotto solo con gli spazi a prodotto interno ed i loro equivalenti completi, detti spazi di Hilbert. Essi sono la più naturale estensione dello spazio euclideo (mantenendo ad esempio la nozione di ortogonalità): $R^N$ e $C^N$ sono spazi metrici, normati e di Hilbert. La teoria di questi nacque due anni dopo la pubblicazione dei risultati di Hilbert sulle equazioni integrali con i lavori di Schmidt e Frechet. La terminologia di Hilbert, ancora classicheggiante, fu sostituita dallo spregiudicato uso del linguaggio della geometria euclidea. In uno spazio di Hilbert ad ogni coppia di vettori x e y viene associato uno scalare (x,y) detto prodotto interno di x e y. Se (x,y) = 0, si dice che x e y sono ortogonali.

In ogni spazio di Hilbert esiste almeno un insieme completo di elementi; trovano qui sistematizzazione tutti i concetti relativi allo sviluppo di un elemento dello spazio secondo un insieme completo, che si sono già incontrati a proposito della teoria di Sturm e Liouville. Gli insiemi di autofunzioni menzionati nel paragrafo precedente a proposito di alcuni problemi quantistici (oscillatore armonico, momento angolare, atomo d'idrogeno) costituiscono insiemi completi in opportuni spazi di Hilbert. Per il tipo di considerazioni che ci interessano, è particolarmente importante lo spazio delle funzioni y(x) complesse di variabile reale definite in (a,b), tali che esista e sia finito l'integrale (secondo Lebesgue) $\int_a^b |y(x)|^2 \, dx$. Queste funzioni si dicono "a modulo quadrato sommabile" ed il loro spazio si indica con $L^2(a,b)$ (14,20). Questo è uno spazio di Hilbert (20) in cui il prodotto tra due elementi f e g è dato da:

$$(f,g) = \int_a^b f^x(x)g(x)dx$$

dove $f,g \varepsilon L^2$. Infine, si dice "operatore" una prescrizione T che associa ad un elemento f di $L^2$ un altro elemento di $L^2$g in modo tale che g = Tf. In Meccanica Quantistica sono particolarmente importanti gli operatori lineari (a causa del principio di sovrapposizione degli stati) ed hermitiani (a causa del fatto che i loro autovalori sono reali, v. avanti).

Nell'ambito degli assiomi appena enunciati in sintesi (ed esposti assai più dettagliatamente in (1,6,14,20,22,23,23)) si colloca l'enunciazione "per postulati" della Meccanica Quantistica cui si accennava nel paragrafo 1. La funzione d'onda $\psi$ è un elemento di $L^2$ (-∞, +∞) e porta con sé tutte e sole le informazioni sullo stato del sistema quantistico, compresa la densità di probabilità associata al suo modulo quadrato. Ad ogni osservabile è associato un operatore lineare ed hermitiano; l'osservabile può assumere tutti e soli i valori che coincidono con gli autovalori dell'operatore (i quali sono reali per l'hermiticità dell'operatore) ed infine, se il sistema è nello stato $\psi$, alla quantità ($\psi$, $T\psi$) si dà il significato di media delle misure dell'osservabile T nello stato $\psi$. Coppie di osservabili i cui operatori associati commutano, sono misurabili simultaneamente con precisione arbitrariamente grande, mentre esistono le note relazioni di indeterminazione in caso contrario. Alla tecnica di separazione delle variabili corrisponde, in linguaggio operatoriale, la ricerca di autofunzioni simultanee di un certo insieme di operatori commutanti (7): nel caso dell'atomo di idrogeno, ad esempio, gli operatori sono $H$, $L^2$, $L_Z$ (hamiltoniano, modulo quadro e componenze Z del momento angolare).

Con l'enunciazione della Meccanica Quantistica per postulati si è così tornati, in un certo senso, al punto di partenza, ma dopo avere chiarito - spero - alcuni aspetti fondamentali:

1. l'interpretazione di Gottinga si mostrò complessivamente superiore alla Meccanica Ondulatoria anche per il maggiore respiro matematico dimostrato rispetto a quest'ultima. Ciò non impedì, tuttavia, (11) che la Meccanica Quantistica inglobasse i metodi della Meccanica Ondulatoria in quanto più "familiari" ai fisici;

2. l'impostazione assiomatica della Meccanica Quantistica risentì fortemente dell'analoga veste conferita alla Matematica degli anni '20 dall'opera della scuola di Hilbert. Questo contribuì ad un riavvicinamento della Matematica alla Fisica, in termini di immediate applicazioni delle sue assiomatizzazioni, come esplicitamente auspicavano Courant e Hilbert (v. avanti). Uno strumento molto usato nella costruzione di teorie fisiche fu l'"analogia matematica" (13). Essa consisteva nel considerare le strutture matematiche come "modelli" delle teorie fisiche formalizzabili nel loro ambito. Principi relativistici e quantistici divengono teorie quando li si riesce a formulare nel quadro delle grandezze Lorentz-invarianti e nel quadro della teoria degli operatori negli spazi di Hilbert, rispettivamente;

3. la Meccanica Quantistica può considerarsi sintesi di due processi di generalizzazione, in Fisica e Matematica: lo sforzo di astrazione necessario per gettare le basi di una nuova Meccanica si appoggiò su metodi matematici derivati a loro volta da uno sforzo analogo compiuto sulla Matematica ottocentesca. In questa chiave un'esposizione della Meccanica Quantistica per postulati recupera significato storico senza perdere in potere esplicativo. Questo potrebbe essere un utile punto di vista nel tentativo di fondere approccio storico e didattico in Meccanica Quantistica.

Nel concludere queste osservazioni, volte a mettere in luce i rapporti tra Fisica e Matematica nel periodo della creazione della Meccanica Quantistica, non credo esista sintesi più felice delle parole di Courant e Hilbert nella prefazione della I edizione (1924) del loro "Methoden der Matematische Physik": "fin dal XVII secolo l'intuizione fisica è stata una sorgente vitale per metodi e problemi matematici. Mode e tendenze recenti hanno, tuttavia, indebolito il legame tra Matematica e Fisica. I matematici, allontanandosi dalle radici intuitive della Matematica, si sono concentrati sui perfezionamenti ed hanno enfatizzato l'aspetto basato su postulati della Matematica, trascurando talvolta l'unità della loro scienza con la Fisica e con altri campi.

D'altra parte, in molti casi, i fisici hanno trascurato di apprezzare il modo di pensare dei matematici. Questa frattura è certamente una seria minaccia alla scienza nel suo insieme; la vasta corrente dello sviluppo scientifico potrebbe dividersi in piccoli rivoli e seccarsi. Sembra quindi importante dirigere i nostri sforzi verso la riunificazione delle tendenze divergenti, chiarendo le caratteristiche comuni e le interconnessioni di fatti scientifici distanti e diversi".

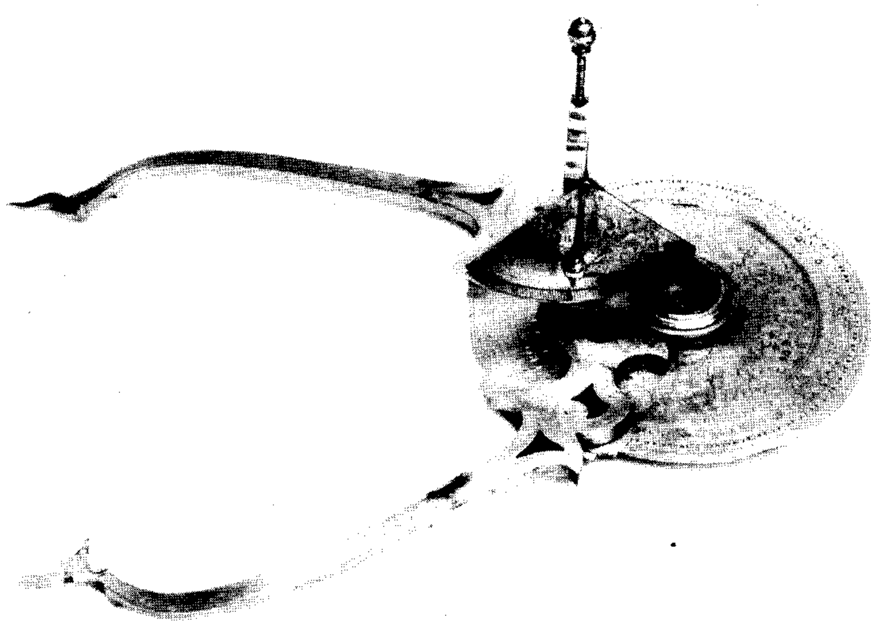
## Bibliografia


1. Arfken, G.: Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, 1970.
2. Baracca A., Ruffo S., Russo A.: Scienza e Industria 1848-1915. Laterza, 1979.
3. Born, M.: Autobiografia di un fisico. Editori Riuniti, 1980.

4. Born, M.: Fisica Atomica. Boringhieri, 1976.
5. Bourbaki, N.: Elementi di storia della matematica. Feltrinelli, 1963.
6. Calogero, F.: Dispense del corso di Metodi Matematici della Fisica. Università di Roma, 1977.
7. Camiz P., Ferrari E.: Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Teorica. Università di Roma, 1976.
8. Courant R., Hilbert D.: Methods of Mathematical Physics. Interscience, 1953.
9. Dallaporta, N.: Istituzioni di Fisica Teorica. Patron, 1971.
10. Dirac, P.A.M.: I principi della Meccanica Quantistica. Boringhieri, 1976.
11. Donini, E.: Il caso dei quanti. Clup-Clued, 1982.
12. Dumas M. (a cura di): Storia della Scienza. Vol. II. Le scienze matematiche e l'astronomia. Laterza, 1976.
13. Dumas M. (a cura di): Storia della Scienza. Vol. III. Le scienze del mondo fisico. Laterza, 1976.
14. Fano, G.: Algebra lineare e serie di funzioni ortonormali. Zanichelli, 1967.
15. Gasiorowicz, S.: Quantum Physics. Wiley, 1974.
16. Goldstein, H.: Meccanica Classica. Zanichelli, 1971.
17. Hanle, P.A.: The Schrodinger-Einstein correspondence and the sources of the wave mechanics. Am. J. Phys., 47, 644, 1979.
18. Heisenberg, W.: I principi fisici della teoria dei Quanti. Einaudi, 1948.
19. Hund, F.: Storia della Teoria dei Quanti. Boringhieri, 1980.
20. Kreyszig, E.: Introductory functional analysis with applications. Wiley, 1978.
21. Landau, L.D., Lifsic E.M.: Meccanica Quantistica. Boringhieri, 1969.
22. Luenberger, D.G.: Optimization by vector space methods. Wiley, 1969.
23. Margenau, M. Murphy, G.M.: The mathematics of Physics and Chemistry. Van Nostrand, 1943.
24. Rossetti, C.: Metodi matematici della Fisica. Libreria Editrice Universitaria Levrotto e Bella, Torino, 1977.
25. Tagliaferri, G.: Storia della Fisica Quantistica. Angeli, 1985.
26. Van der Waerden B.L. (Editor): Sources of Quantum Mechanics. Dover, 1967.
27. Willmott, J.C.: Atomic Physics. Wiley, 1975.

III.35 COMPASSO NAUTICO
1557
Balthassar Lanceus Urbinas
Ottone dorato
Diametro 150

ISTITUTO E MUSEO DI STORIA DELLA SCIENZA DI FIRENZE
(Fotografia di Franca Principe)



III.35

Presenta tre graduazioni, la più interna delle quali corrisponde agli otto venti segnati lungo la circonferenza. Concentricamente sono segnate firma dell'artefice e data. Nel centro è incastonata la bussola che porta il pernio delle gambe arcuate del compasso: una delle gambe è fissa, l'altra girevole fornita di archipenzolo segnato "B.L.", graduato e girevole. In realtà, questo complesso strumento non ha alcun utilizzo e rappresenta un'invenzione del suo artefice.
inv. 682

*(Si veda articolo M. Miniati, pag. 45)*