

Vladimir
Grubelnik,
Marko Marhl

Dipartimento di
Fisica, Facoltà
dell'Educazione,
Università di
Maribor, Slovenia

La formazione di gocce nei liquidi in caduta libera

[Tradotto e pubblicato con autorizzazione dell'American Association of Physics Teachers da:
"Drop formation in a falling stream", *American Journal of Physics*, 73, (5), 2005]

Traduzione a cura di Silvia Pugliese Jona, Ivrea

(Pervenuto il 27.05.2005, approvato il 03.03.2006)

ABSTRACT

The narrowing of a falling stream of liquid is a well-known demonstration of the equation of continuity. We consider the behavior at the bottom of the stream where the stream swells and forms droplets. Drop formation is illustrated by detailed photos of experiments. A simple mathematical description and the key processes responsible for drop formation are given.

I. Introduzione

La formazione di gocce in un flusso liquido in caduta libera è un fenomeno comune ed interessante che è stato frequentemente oggetto di ricerca fin dall'inizio della formulazione di teorie idrodinamiche. Ci si rese presto conto che la causa della formazione delle gocce è la riduzione delle dimensioni trasversali del flusso dovuta all'azione della tensione superficiale che tende a ridurre l'estensione della superficie liquida. Nel 19° secolo il fenomeno fu descritto da Rayleigh [1-3]. Rayleigh studiò le condizioni di stabilità di un cilindro liquido di raggio r_0 e di lunghezza infinita disturbato da perturbazioni di diverse lunghezze d'onda, e calcolò come esse si rafforzano nel tempo. Le perturbazioni di lunghezza d'onda maggiore tendono a formare gocce di grandi dimensioni, e per questo motivo richiedono che si verifichino significativi trasferimenti di massa all'interno del liquido. L'equilibrio tra le forze di tensione superficiale e le forze d'inerzia si ha per $\lambda = 9r_0$: in altre parole, la formazione delle gocce dipende dal numero di Weber [4] che è il rapporto tra l'inerzia e la tensione superficiale.

La teoria della formazione di gocce fu successivamente perfezionata introducendo la viscosità [5], gli effetti non lineari di ordine superiore [6] e le cariche elettriche superficiali [7]. Recenti lavori hanno ancora introdotto l'idea di invarianza di scala [8-11]. La separazione in gocce è invariante rispetto alla scala se il meccanismo è governato dalla vicinanza tra il "collo" dove il flusso è più sottile e il punto in cui si forma la goccia. Il diametro del "collo" decresce fino ad annullarsi, diventando quindi talmente stretto da poterlo considerare non influenzato dalle dimensioni macroscopiche del sistema. Il meccanismo del distacco risulta determinato solo dallo spessore del collo e non dai diametri del rubinetto e delle gocce: la memoria delle condizioni iniziali e al contorno risulta perduta. Recentemente tuttavia sono state analizzate alcune importanti eccezioni a questo comportamento [11].

L'importanza degli studi sul meccanismo di formazione delle gocce fu riconosciuta fin dai primi studi in questo campo. Nel 1833 Savart studiò l'evoluzione di getti liquidi illuminandoli con fasci planari di luce ed osservò la crescita delle ondulazioni che precedono la rottura del getto e la sua separazione in gocce [8]. Dapprima le tecniche fotografiche e adesso l'uso dei computer hanno fornito nuovi strumenti per osservare il fenomeno. Il passaggio dalle prime fotografie fatte da Rayleigh [12] alle prime fotografie ad alta risoluzione di acqua che scende da un rubinetto fatte da Peregrine *et al.* [13] è discusso in [8].

La formazione di gocce è facile da osservare ed analizzare sperimentalmente ma la sua descrizione matematica non è semplice. La teoria basata sulle equazio-

ni di Navier-Stokes [3, 8, 14, 15], sia pure ridotte ad una sola dimensione, è troppo difficile ed improponibile ai non specialisti.

In questo articolo si adotta un procedimento semiquantitativo in cui la parte quantitativa riguarda solo i processi chiave che determinano la formazione di gocce in un liquido in caduta. Si utilizzano i concetti di tensione superficiale, di pressione nei liquidi e di conservazione della portata nei liquidi incomprimibili (l'equazione di continuità). Si considerano liquidi newtoniani per i quali si sono rilevate sperimentalmente notevoli somiglianze tra le forme delle superfici libere in prossimità del punto di distacco [10, 16]. Per questi liquidi il meccanismo risulta indipendente e dal raggio iniziale del flusso e dalla tecnica sperimentale adottata per produrre le gocce [8], sia essa uno schizzo, un ponte liquido o, come nel nostro caso, una semplice caduta.

Inizieremo occupandoci di come diminuisce il diametro del flusso che cade, un problema risolvibile analiticamente per un liquido ideale (non viscoso) [17, 18], e punteremo l'attenzione sul tratto inferiore della caduta, dove si produce la transizione da un flusso continuo ad una successione di gocce.

**II.
Il restringersi di
un flusso liquido
in caduta**

La sezione trasversale del flusso liquido proveniente da un rubinetto si restringe a causa dell'attrazione gravitazionale. Posti S_0 e v_0 la sezione e la velocità all'uscita dal rubinetto (Fig. 1), possiamo calcolare la sezione S e la velocità v in qualsiasi istante successivo t sfruttando l'equazione di continuità basata sulla conservazione del flusso volumico Φ_v :

$$\Phi_v = S_0 v_0 = S v. \tag{1}$$

Durante la caduta la velocità v aumenta con accelerazione pari alla gravitazionale. Alla distanza h dal rubinetto

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene

$$S = S_0 v_0 / \sqrt{(v_0^2 + 2gh)}, \tag{3}$$

da cui segue, nell'ipotesi di flusso cilindrico a sezione circolare ($S = \pi r^2$ e $S_0 = \pi r_0^2$), il raggio r del flusso d'acqua:

$$r = r_0 \sqrt[4]{v_0^2 / (v_0^2 + 2gh)}. \tag{4}$$

La (4) predice con un'approssimazione impressionante la forma di un flusso d'acqua in caduta libera: si veda la figura 2, che è una fotografia di acqua in caduta libera con sovrapposta la soluzione della (4).

Per ottenere la concordanza illustrata dalla figura 2 bisogna misurare la velocità iniziale v_0 con elevata precisione. Un metodo affidabile per determinarla consiste nel misurare il flusso Φ_v , ciò che noi abbiamo fatto misurando il volume d'acqua V raccolto in un bicchiere nel tempo t occorrente per riempirlo. Poiché Φ_v è costante, ne segue che $\Phi_v = V/t$, e da $\Phi_v = S_0 v_0$ si ottiene

$$v_0 = V/S_0 t. \tag{5}$$

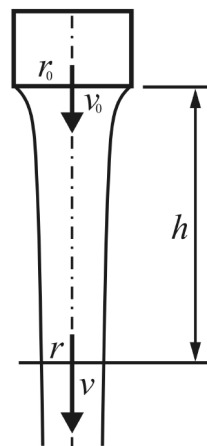


Figura 1. Il restringersi del flusso liquido che cade da un rubinetto.

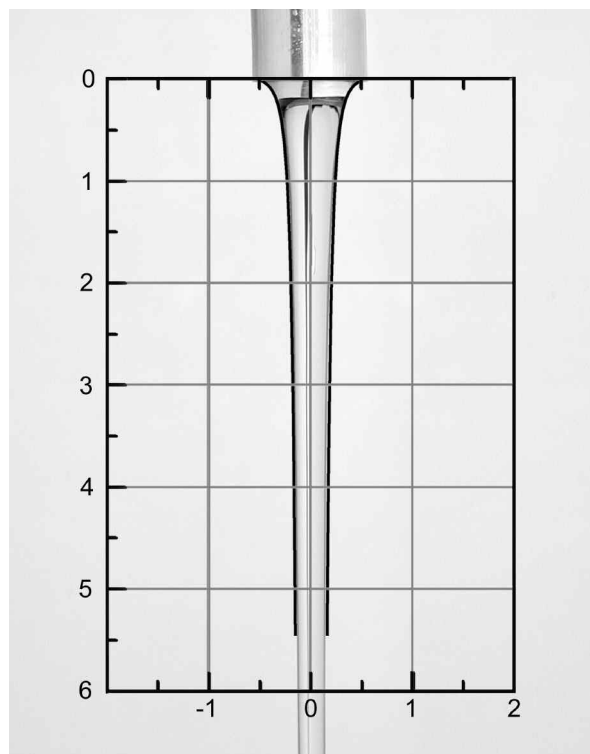


Figura 2. Fotografia di un flusso d'acqua in caduta con sovrapposta la soluzione analitica della sua forma. Misure: $r_0 = 0,50 \pm 0,02$ cm, $v_0 = 11,0 \pm 0,5$ cm/s; i calcoli sono stati svolti ponendo $r_0 = 0,50$ cm e $v_0 = 11,0$ cm/s.



Figura 3. La formazione di una goccia al fondo di un filo d'acqua. Le gocce crescono da rigonfiamenti nel flusso liquido.

Nella prova illustrata in figura 2 la velocità iniziale valeva $v_0 = (11,0 \pm 0,5)$ cm/s. Inserendo questo valore nella (4) abbiamo calcolato i valori del raggio r in funzione di h che ci hanno permesso di confrontare la teoria con l'esperimento.

III. La formazione di gocce

Il restringersi del flusso d'acqua in caduta discusso nel paragrafo II offre un modello che ne descrive la forma reale con buona approssimazione, valido però solo per la parte superiore del flusso. Per spiegare come si formano le gocce al fondo del filo d'acqua si ricorre ad altre considerazioni. La figura 3 mostra che nella sua parte inferiore il filo d'acqua torna a gonfiarsi. All'uscita dal rubinetto si producono nell'acqua lievissime perturbazioni ondulatorie, difficili da osservare. L'aumento della loro ampiezza durante la caduta provoca infine la separazione in gocce. Il processo è favorito dalla tensione superficiale che tende a ridurre l'area della superficie liquida: al limite, se fosse possibile, raccogliendo tutto il liquido in un unico volume sferico. A ciò si contrappone l'inerzia, che ritarda i necessari spostamenti di grandi masse di liquido. La separazione in piccole gocce avviene quando si instaura una situazione di equilibrio tra i due opposti effetti.

Per comprendere il meccanismo per cui le perturbazioni ondulatorie si rafforzano nel corso della caduta, dobbiamo scrivere l'espressione della pressione all'interno di un filetto fluido. Approssimiamo localmente la forma del flusso come cilindrica: a causa della tensione superficiale la pressione all'interno del cilindro

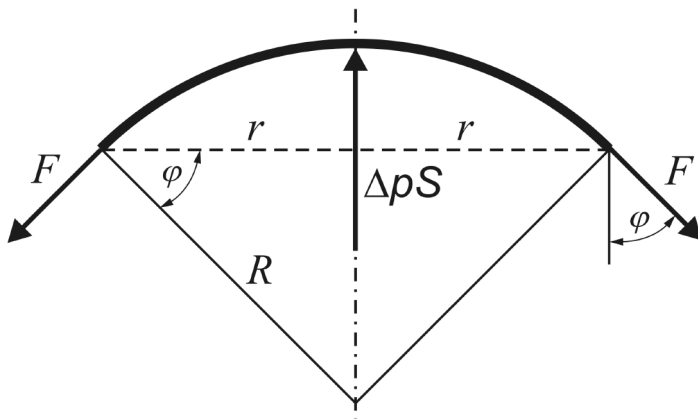


Figura 4. Sezione trasversale del flusso cilindrico. La differenza di pressione Δp agente sulla superficie S del cilindro è in relazione con la forza F della tensione superficiale.

è maggiore della pressione dell'aria circostante. La differenza $\Delta p = p - p_0$ tra la pressione interna p e la pressione esterna p_0 , moltiplicata per la superficie laterale del cilindro S , è in relazione con la forza F esercitata dalla tensione superficiale. Con le notazioni di figura 4,

$$\Delta p S - 2F \cos \phi = 0. \tag{6}$$

Se (confondendo la corda $2r$ con l'arco - NdT) poniamo $S = 2rl$ con l lunghezza del cilindro e $F = \gamma l$, dove γ è la tensione superficiale, possiamo esprimere Δp come

$$\Delta p = \gamma \cos \phi / r. \tag{7}$$

Poiché $r = R \cos \phi$, Δp è

$$\Delta p = \gamma / R. \tag{8}$$

Per la (8) la pressione interna al flusso è maggiore dove il raggio è minore. Poiché (Fig. 5) il liquido tende a fluire dalle zone di maggior pressione p_1 , alle zone di minor pressione, è in tali zone che si producono e crescono i rigonfiamenti. La differenza di pressione $p_1 - p_2$ che pilota il migrare del liquido verso i rigonfiamenti può essere approssimata applicando la (8) ad entrambe le regioni:

$$p_1 - p_2 = \gamma (1/R_1 - 1/R_2). \tag{9}$$

Come mostra la figura 5, la regione 2 è solo approssimativamente cilindrica perciò la (9) è solo una prima approssimazione della differenza di pressione che provoca il trasferimento di liquido verso la goccia che si sta formando. Una stima migliore della pressione all'interno del rigonfiamento richiede di tener conto dei due raggi di curvatura, il trasversale e il longitudinale, da cui deriva l'espressione:

$$p_2 - p_0 = \gamma (1/R_{2,I} - 1/R_{2,II}) \tag{10}$$

dove p_0 è la pressione esterna e $R_{2,I}$, $R_{2,II}$ sono i raggi principali della superficie.

Quando, all'inizio del processo, $R_{2,II} \gg R_{2,I}$, la (10) si riduce alla (8) e la (9) approssima bene la situazione. In uno stadio successivo $R_{2,I}$ cresce e $R_{2,II}$ si riduce fino a raggiungere la forma sferica: $R_{2,II} = R_{2,I} = R_2$ e la pressione interna assume il valore

$$p_2 - p_0 = 2\gamma / R_2. \tag{11}$$

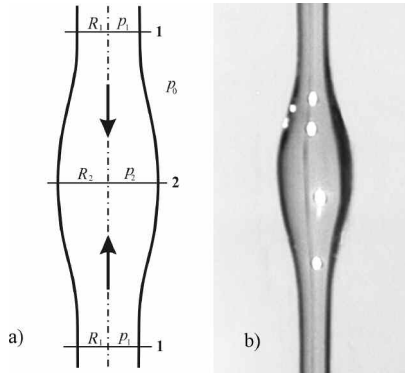


Figura 5. Fase iniziale della formazione di una goccia: (a) schizzo schematico e (b) fotografia. Il liquido fluisce dalla zona di maggior pressione p_1 alla zona rigonfia in cui la pressione p_2 è minore.

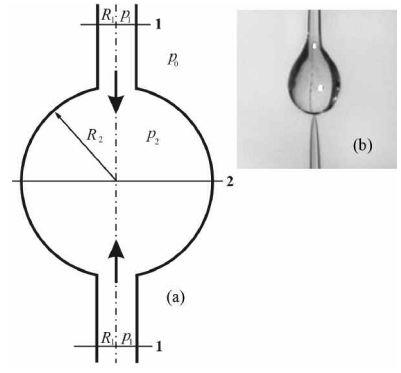


Figura 6. Fase finale della formazione di una goccia: (a) schizzo schematico e (b) fotografia. Il liquido fluisce dalla zona di maggior pressione p_1 nella goccia sferica in cui la pressione p_2 è minore.

La (11) può essere derivata anche con un ragionamento diretto simile a quello che ha portato alla (6). La differenza $p_2 - p_0$ tra la pressione p_2 all'interno della goccia e la pressione dell'aria circostante, spingendo sulla superficie della sfera, fa equilibrio all'azione della tensione superficiale $F = \gamma 2\pi R_2$, da cui si ottiene la (11).

La differenza di pressione che pilota l'arrivo di liquido nella goccia è dunque

$$p_1 - p_2 = \gamma / (1/R_1 - 2/R_2). \quad (12)$$

Durante la crescita della goccia la differenza tra le pressioni aumenta perché R_2 cresce e R_1 si riduce. Il liquido viene ancor maggiormente spinto nella goccia, che finalmente si stacca.

I dettagli del processo dipendono fortemente dal tipo di liquido. L'acqua, per esempio, non forma i lunghi fili sottili che si osservano nell'olio [16]. Una trattazione più esauriente del fenomeno è riportata nel riferimento bibliografico [19].

IV. Discussione

Per effetto della gravità la sezione dei flussi liquidi in caduta diminuisce con la distanza dal punto di efflusso. Nella parte bassa del flusso la sezione torna ad aumentare e si osserva la formazione di gocce. Abbiamo discusso i ruoli della tensione superficiale e delle perturbazioni esterne sulla separazione del flusso in gocce.

Secondo le equazioni (9) e (12) l'aumento delle dimensioni delle gocce è dovuto all'effetto della tensione superficiale, perciò nei liquidi con maggiore tensione superficiale le gocce cominciano a formarsi a minor distanza dal foro d'uscita del rubinetto. L'effetto della tensione superficiale sulla separazione in gocce può essere confermato confrontando i comportamenti di acqua pura e acqua saponata, la cui tensione superficiale è minore di quella dell'acqua pura (Fig. 7). Abbiamo trovato che, con flussi di uguali velocità e sezione trasversale iniziali, nell'acqua pura le gocce si formavano a (5 ± 1) cm dal rubinetto e nell'acqua saponata a (15 ± 2) cm dal rubinetto.

Un altro aspetto da considerare è l'importanza di eventuali perturbazioni, che può essere messa in evidenza semplicemente colpendo leggermente il rubinetto. Quanto maggiore è l'ampiezza della perturbazione, tanto più precocemente si formano i rigonfiamenti precursori delle gocce (Fig. 8). Una discussione approfondita dell'influenza delle perturbazioni sulla separazione in gocce è riportata in [8].

È possibile studiare sperimentalmente liquidi di viscosità maggiore di quella dell'acqua con l'avvertenza che nei liquidi molto viscosi il principale antagonista della tensione superficiale può essere l'effetto dissipativo anziché l'inerzia. Infatti in generale nei liquidi viscosi la formazione di gocce è determinata dalla combinazione di tre fattori: la tensione superficiale, l'inerzia e la viscosità.

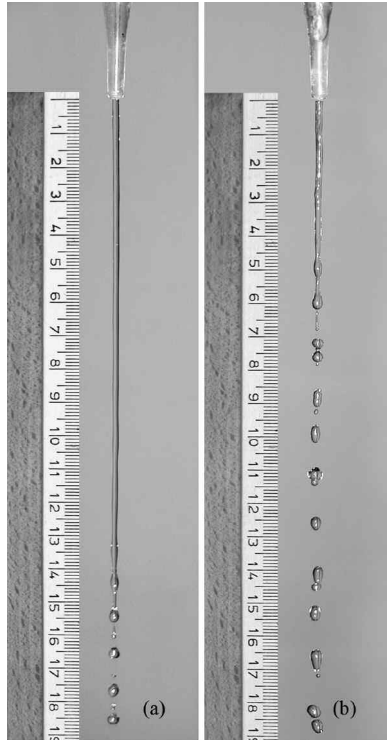


Figura 7. Effetto della tensione superficiale sulla formazione di gocce: (a) nell'acqua pura (tensione superficiale = $0,073 \text{ N/m}$) le gocce si formano ad $h = 5 \pm 1 \text{ cm}$ e (b) nell'acqua saponata (tensione superficiale = $0,03 \text{ N/m}$) le gocce si formano ad $h = 15 \pm 2 \text{ cm}$. In questo esperimento $r_0 = 2,0 \pm 0,2 \text{ mm}$ e $v_0 = 5,0 \pm 0,5 \text{ cm/s}$.

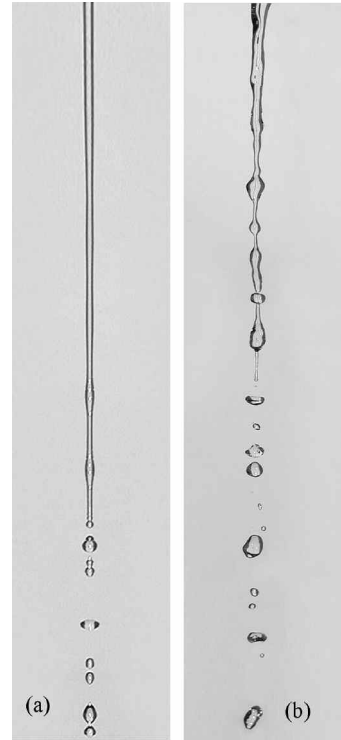


Figura 8. Effetto delle irregolarità nel flusso sulla formazione di gocce: (a) assenza e (b) presenza di perturbazioni forzate.

Bibliografia

- [1] L. RAYLEIGH, "On the instability of jets", *Proc. London Math. Soc.* **10**, pp. 4-13 (1878).
- [2] L. RAYLEIGH, "On the capillary phenomena of jets", *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **29**, pp. 71-79 (1879).
- [3] J. EGGERS, "Theory of drop formation", *Phys. Fluids* **7**, 941-953 (1994).
- [4] M.F. WHITE, *Fluid Mechanics 2^a* ed. (McGraw-Hill, New York, 1986), pp. 262-265.
- [5] C. WEBER, "Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles", *Z. Angew. Math. Mech.* **11**, pp. 136-154 (1931).
- [6] K.C. CHAUDHARY, L.G. REDEKOPP, "The non-linear capillary instability of a liquid jet, Part 1: Theory", *J. Fluid Mech.* **96**, pp. 257-274 (1980).
- [7] S. GROSSMANN, A. MÜLLER, "Instabilities and decay rates of charged viscous liquid jets", *Z. Phys. B: Condens. Matter* **57**, pp. 161-173 (1984).

- [8] J. EGGERS, "Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows", *Rev. Mod. Phys.* **69**, pp. 865-929 (1997).
- [9] J.J. COOPER-WHITE, J.E. PAGAN, V. TIRTAATMADJA, D.R. LESTER, D.V. BOGER, "Drop formation dynamics of constant low-viscosity, elastic fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **106**, pp. 29-59 (2002).
- [10] X.D. SHI, M.P. BRENNER, S.R. NAGEL, "A cascade of structure in a drop falling from a faucet", *Science* **265**, pp. 219-222 (1994).
- [11] P. DOSHI, I. COHEN, W.W. ZHANG, M. SIEGEL, P. HOWELL, O.A. BASARAN, S.R. NAGEL, "Persistence of memory in drop breakup: The breakdown of universality", *Science* **302**, pp. 1185-1188 (2003).
- [12] L. RAYLEIGH, "Some applications of photography", *Nature* (London) **44**, pp. 249-254 (1891).
- [13] D.H. PEREGRINE, G. SHOKER, and A. SYMON, "The bifurcation of liquid bridges", *J. Fluid Mech.* **212**, pp. 25-39 (1990).
- [14] S.E. BECHTEL, M.G. FOREST, K.J. LIN, "Closure to all orders in 1-D models for slender viscoelastic free jets: An integrated theory for axisymmetric, torsionless flows", *Stab. Appl. Anal. Contin. Media* **2**, pp. 59-100 (1992).
- [15] J. EGGERS, T.F. DUPONT, "Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation", *J. Fluid Mech.* **262**, 205-221 (1994).
- [16] T.A. KOWALEWSKI, "On the separation of droplets from a liquid jet", *Fluid Dyn. Res.* **17**, pp. 121-145 (1996).
- [17] D. HALLIDAY, R. RESNICK, J. WALKER, *Fondamenti di Fisica - Meccanica e Termologia*, pp. 320-321, Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
- [18] D.C. GIANCOLI, *Fisica, principi e applicazioni*, pp. 293 e seguenti, Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
- [19] C. CLANET, J.C. LASHERAS, "Transition from dripping to jetting", *J. Fluid Mech.* **383**, pp. 307-326 (1999).

Se i liquidi come champagne e birra fossero privi di sostanze tensioattive, le bolle in essi contenute non sarebbero in grado di risalire formando le caratteristiche file lineari. In un liquido puro, le bolle che risalgono verso la superficie sono molto instabili e, tipicamente, non riescono a mantenersi in linea retta mentre si spostano verso l'alto. L'instabilità delle bolle in risalita è il frutto delle interazioni tra file successive di bollicine in movimento. Queste bolle sono assai sensibili a qualsiasi spostamento laterale determinato da forze agenti nel liquido in cui sono immerse. Se, per una qualche ragione, una bolla viene spinta leggermente fuori dalla propria traiettoria, lo spostamento risulterà, in realtà, ancora più ampio perché la bolla interessata viene spinta anche da quella che la segue immediatamente nella fila. Il percorso rettilineo seguito dalle bolle risulta, in questo caso, deviato e le bolle in risalita si spostano seguendo direzioni diverse l'una dall'altra.

Le bolle che risalgono nei liquidi come birra e champagne invece sono stabilizzate dal loro rivestimento di tensioattivi e dunque possono mantenersi in una fila ordinata mentre si fanno strada verso la superficie. Se il fondo della bolla è irrigidito dai tensioattivi (anche soltanto in parte) e la bolla in questione incontra una forza che la disloca rispetto al suo asse verticale di risalita, la forza agente tende di fatto a spingere la bolla indietro verso la fila delle altre bolle e verso il suo asse di simmetria piuttosto che lontano da questo, perciò la direzione verticale dello spostamento si mantiene stabile.

La stabilità della fila di bolle in movimento è legata anche alla dimensione delle bolle coinvolte. Le bolle piccole (come quelle osservabili nello champagne e nella birra) sono sferiche e risalgono in linea retta in parte a causa del fenomeno appena descritto. Tutto questo non accadrebbe se la bolla potesse raggiungere il raggio critico di circa 3 mm. Bolle di questa dimensione, indipendentemente dalle sostanze tensioattive presenti nei liquidi considerati, ascendono con una velocità maggiore e vengono deformate dalla pressione del liquido che agisce sulla loro superficie mentre si spostano verso l'alto; la pressione esercitata dal liquido sulla cima delle bolle in ascesa le deforma a tal punto che esse appaiono più che altro di forma ellittica o ovale. Quando le dimensioni di una bolla aumentano, anche la deformazione si fa più spinta finché il diametro orizzontale della bolla non risale più in linea retta ma tende piuttosto a seguire un percorso a zig zag o lungo una spirale. Questo fenomeno si può osservare negli acquari in cui le bolle raggiungono appunto la dimensione critica di circa 3 mm di diametro e, di conseguenza, seguono un percorso a spirale fino alla superficie della vasca quando risalgono e non si dispongono in linea retta.

Gérard Liger-Belair, *Bollicine - La scienza e lo champagne*, Einaudi, Torino 2005