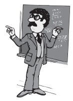

Didattica

Elio Fabri
già Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
elio.fabri@tiscali.it

Il paradosso del condensatore

(Pervenuto il 19.6.2016, approvato il 14.10.2016)

ABSTRACT
A simple argument is given, showing that a revision of newtonian dynamics is necessarily required when you assume the principle of relativity as a general law of physics. The motion of a charged particle within a plane condenser (uniform electric field) is studied in two different reference frames, and contradictory results are found if Newton's laws are used. An exact solution of the same problem according to relativistic dynamics is also given.

1. Introduzione

La prova di fisica recentemente introdotta come possibile seconda prova nell'esame di Stato per i Licei Scientifici, insieme con le vigenti Indicazioni Nazionali [1] e col "Quadro di riferimento della seconda prova di Fisica" [2] ha reso obbligatorio – tra l'altro – l'insegnamento della relatività ristretta nel quinto anno.

In passato la cosiddetta "fisica moderna" veniva più o meno considerata, a discrezione del singolo docente. Un'indagine [3] condotta su un piccolissimo campione d'insegnanti e presentata al Congresso AIF 2008 (Roma) mostrò che il tempo dedicato alla fisica moderna variava molto, ma mediamente si poteva valutare attorno alle 20 ore nel 5º anno. Invece il cosiddetto "Syllabus", [4] che presenta un'indicazione (non so quanto vincolante) di contenuti e di tempo per l'ultimo anno, assegna alla sola relatività il 20% del monte ore, ossia 20 ore; per tutta la fisica moderna se ne prevedono 50.[1]

La nuova situazione impone un ovvio e significativo sforzo a molti insegnanti (specialmente a quelli laureati in matematica, che nella loro formazione universitaria hanno avuto un contatto con la fisica moderna che è eufemistico definire scarso). Si rende perciò necessario un impegno per la riqualificazione degli insegnanti. In parallelo non si può tralasciare il problema dei libri di testo, che raramente sono soddisfacenti, anche se di autori rinomati, e anche nelle nuove edizioni apparse dopo le recenti innovazioni. Solo per fare un esempio, è difficile trovare esposizioni accettabili del principio di relatività (PR); ma di questo parleremo in un'altra occasione.

Nel quadro sommariamente delineato, può essere utile dedicare qualche breve scritto ad argomenti specifici e al tempo stesso critici per un corretto insegnamento della "fisica moderna"; in particolare della relatività. A ciò è dedicata questa nota, su un possibile modo di mostrare come sia necessario, una volta ammesso il PR, rivedere la meccanica newtoniana.

Ho scelto di centrare il discorso appunto sul "paradosso del condensatore", che a mia conoscenza non sembra sia già stato proposto prima della scuola estiva AIF 2000, anche se certamente non potrei escluderlo. Il paradosso si trova esposto nel *Quaderno* 16 di *La Fisica nella Scuola* [5] (in seguito indicato come Q16). Però nel Q16 l'esposizione del paradosso e della sua risoluzione si trova divisa in due punti del testo[2]; mi è sembrato opportuno darne una presentazione unitaria, e con l'occasione approfondirne qualche aspetto.

La prima parte di questo articolo (Sez. 2) esamina gli aspetti logici (in senso fisico) della questione, senza calcoli né formule. La seconda parte (Sez. 3, 4, 5) espone una trattazione esatta secondo la meccanica relativistica del punto. Anche il livello matematico di questa seconda parte è tutto sommato elementare (al più ci sono da calcolare un paio di primitive non banali); l'uso della dinamica relativistica può essere una buona occasione per rivederne e approfondirne alcuni aspetti. A conclusione, segue un commento didattico (Sez. 6). Volendo si può limitare la lettura alle Sez. 2 e 7, le sole indispensabili per l'uso in classe.

2. Il paradosso del condensatore

Supponiamo di avere nel nostro laboratorio (riferimento K) il solito condensatore piano (Fig. 1), con armature sufficientemente estese rispetto alla loro distanza per poter trattare il campo come uniforme nella regione centrale. Nella figura sono indicati i segni delle cariche e il verso del campo.

Il quadro teorico che ora assumiamo è quello della fisica newtoniana, integrata dalle equazioni di Maxwell, che supponiamo valide nel riferimento K.

Da un punto dentro il condensatore lanciamo un elettrone, in direzione parallela alle armature, con velocità iniziale $\vec{v}_0$ verso destra: esso verrà deviato verso l'armatura positiva (quella inferiore). Dato che il campo è uniforme, la traiettoria è una parabola. Inoltre *la componente orizzontale della velocità è costante*: questo sarà importante per il seguito.

Passiamo ora a studiare l'esperimento in un riferimento K' che si muove rispetto al laboratorio con velocità costante, uguale alla velocità iniziale dell'elettrone. In K' il condensatore si muove in senso opposto, con velocità $-\vec{v}_0$. Abbiamo dunque sulle due armature delle cariche negative e positive che vanno verso sinistra, e si hanno due correnti: le frecce in Fig. 2 indicano i versi delle correnti, che sono ovviamente opposti sulle due armature.

A questo punto ci serviamo del PR: *anche in* K' *valgono le equazioni di Maxwell*. Possiamo quindi dire:

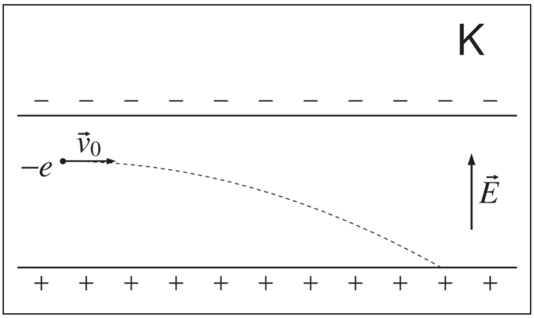

Figura 1. Nel riferimento di quiete del condensatore.

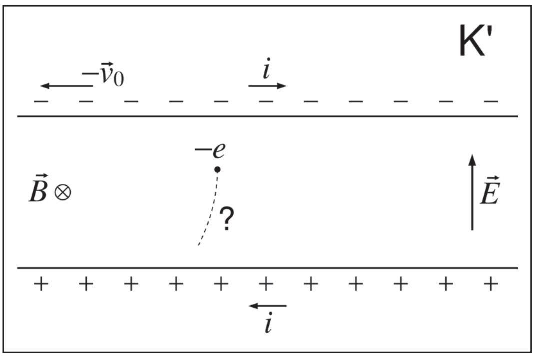

Figura 2. Nel riferimento di quiete iniziale dell'elettrone.

a) Che anche visto da K' il campo elettrico tra le armature è uniforme e perpendicolare a queste. Infatti il campo elettrico dipende solo dalla densità di carica, non dal moto delle cariche. Non possiamo essere certi del suo valore finché non conosciamo la legge di trasformazione della densità di carica, ma una densità uniforme in K certamente risulterà uniforme anche in K'. Possiamo quindi applicare in K' i consueti ragionamenti che si usano per un condensatore piano: teorema di Gauss ecc.

b) Che le correnti producono un campo magnetico, diretto verso l'interno della figura. Per convincersi della direzione del campo si può ricorrere al teorema della circuitazione applicato a opportuni rettangoli, come si fa coi consueti solenoidi. Per brevità non entro in dettagli.

In K' l'elettrone è inizialmente fermo. Quando lo si lascia andare comincia a cadere; cadendo acquista velocità, e con la velocità compare una forza di Lorentz, progressivamente crescente. È facile verificare che la componente orizzontale della forza è diretta *verso sinistra*. Dunque la componente orizzontale della velocità dell'elettrone, che era nulla all'inizio, a tempi successivi è diretta verso sinistra e va crescendo.

Questo risultato (ecco il paradosso) è incompatibile con quanto visto ragionando in K: una velocità costante (pari a $\vec{v}_0$) in un riferimento non può risultare variabile nel tempo se misurata nell'altro. Si noti che non è in questione la *legge di trasformazione della velocità* da K a K′, cioè quale sia la giusta relazione tra queste velocità: il problema è solo che, essendo uniforme il moto relativo dei due riferimenti, non si spiega come una velocità costante in uno diventi variabile nell'altro.

Il paradosso deriva dall'aver assunto insieme:

a) le leggi della dinamica newtoniana
b) il PR, e in particolare la validità delle equazioni di Maxwell in entrambi i riferimenti.

Per risolvere il paradosso occorre dunque rinunciare a una delle due: ad *a*) oppure a *b*).

Se riteniamo sufficientemente provato *b*), allora è necessario rinunciare ad *a*), ossia modificare la dinamica newtoniana.

3. Soluzione relativistica: le relazioni generali

Non è qui possibile ripercorrere tutto l'iter della costruzione della dinamica relativistica, ma è utile richiamare i punti essenziali.[3]

Supponiamo dimostrato che la seconda legge della dinamica può ancora essere scritta nella forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

a patto di modificare la relazione tra $\vec{p}$ e $\vec{v}$ che diventa

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{2}$$

con la ben nota espressione di γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3}$$

Si può definire un'energia $\mathcal{E}$, data da[4]

$$\mathcal{E} = mc^2\gamma \tag{4}$$

Non darò tutta la dimostrazione, e rimando al Q16 per la discussione che mostra come la $\mathcal{E}$ definita dalla (4) abbia tutte le proprietà che ci si deve aspettare da un'energia. È importante però ricordare alcune relazioni e una delle proprietà dell'energia meccanica, valida nella dinamica newtoniana, e che rimane valida anche in dinamica relativistica se si usa la (4) come espressione dell'energia.

Le relazioni di cui faremo uso sono due:

$$\vec{v} = c^2\frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} \tag{5}$$

che segue immediatamente da (2) e (4). Poi quella che si può chiamare *relazione fondamentale della dinamica relativistica*:

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p^2. \tag{6}$$

La (6) si ottiene con alcuni passaggi, partendo dalla (3). Quadrando questa:

$$\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1$$

$$c^2\gamma^2 = c^2 + \gamma^2 v^2.$$

A questo punto basta moltiplicare tutto per m^2c^2 e confrontare con le (2), (4), per ottenere la (6).

Un altro risultato importante è che *anche in meccanica relativistica vale il teorema delle forze vive*. Vediamo.

Partendo dalla (1):

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

e moltiplicando scalarmente per $\vec{v}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot d\vec{p}.$$

Per trasformare il secondo membro, differenziamo la (6) e usiamo la (5):

$$\mathcal{E}\, d\mathcal{E} = c^2 \vec{p} \cdot d\vec{p}$$

$$d\mathcal{E} = c^2 \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d\vec{p}.$$

Siamo così arrivati a

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = d\mathcal{E}$$

la cui interpretazione è chiara: il primo membro è il lavoro elementare della forza $\vec{F}$, il secondo è la variazione di $\mathcal{E}$.

In meccanica newtoniana vale il teorema delle forze vive

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = dT$$

che si dimostra in modo del tutto simile. Non possiamo interpretare $\mathcal{E}$ come energia cinetica relativistica, solo perché a questa dobbiamo richiedere che si annulli quando $\vec{v} = 0$ mentre in tali condizioni $\mathcal{E} = mc^2$. Ma la soluzione è facile: basta prendere come energia cinetica

$$T = \mathcal{E} - mc^2.$$

Dal teorema delle forze vive, se la forza è conservativa e quindi ammette un'energia potenziale V, segue anche in meccanica relativistica la conservazione dell'energia totale $T + V$, e anche di $\mathcal{E} + V$.

5. Torniamo all'elettrone

Abbiamo un elettrone che parte con velocità iniziale orizzontale in un campo elettrico uniforme, con direzione verticale (Fig. 1). Prendiamo l'asse x orizzontale, nel verso di $\vec{v}_0$, e l'asse y verticale, nel verso del campo elettrico $\vec{E}$. Essendo $F_x = 0$, per la (1) p_x è costante, mentre per p_y si ha

$$\frac{dp_y}{dt} = -eE \quad \text{da cui} \quad \mathrm{p}_y = -eEt.$$

Quindi, per la (6):

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p_x^2 + c^2e^2E^2t^2. \tag{7}$$

La (5) ci dice che la componente x della velocità vale

$$v_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2p_x}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + c^2e^2E^2t^2}}$$

e da questa si vede la diminuzione di v_x nel tempo, il che già risolve il paradosso.

Spiegazione verbale: la componente p_x di $\vec{p}$ si conserva, come in meccanica newtoniana; ma essendo $p_x = m\gamma v_x$, v_x decresce perché γ aumenta. Infatti γ dipende dal *modulo* della velocità, e questo cresce a causa dell'aumento di v_y. Oppure: γ aumenta perché aumenta l'energia cinetica, a spese dell'energia potenziale.

6. Determinazione della traiettoria

Non ha un vero interesse per il paradosso sapere quale sia la traiettoria dell'elettrone. Visto però che se ne può dare un'espressione elementare, e che risulta una curva geometrica nota, propongo il calcolo a solo scopo d'esercizio, anche se forse troppo complesso per l'impiego in classe.

Come abbiamo visto, si ha

$$p_x = cost. \qquad p_y = -eEt.$$

Ne segue

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = -\frac{c^2eEt}{\mathcal{E}}. \tag{8}$$

Converrà abbreviare l'espressione di $\mathcal{E}$, data dalla (7), ponendo

$$A^2 = m^2c^4 + c^2p_x^2 \quad B = ceE.$$

La prima delle (8) diventa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2p_x}{\sqrt{A^2 + B^2t^2}}$$

che può essere integrata con la sostituzione

$$t = \frac{A}{B}\sinh u.$$

Tenendo conto della condizione iniziale $x(0) = 0$, si trova

$$x = \frac{c^2p_x}{B}u. \tag{9}$$

Passiamo alla seconda delle (8):

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{cBt}{\sqrt{A^2 + B^2t^2}}$$

che è d'integrazione più immediata:

$$y = c\frac{A}{B}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}t^2}\right) = -c\frac{A}{B}(\cosh u - 1).$$

Usando la (9) si arriva a

$$y = -c\frac{A}{B}\left(\cosh\frac{Bx}{c^2 p_x} - 1\right)$$

che è una catenaria (capovolta).

7. Commento didattico

Nell'introduzione ho scritto che la Sez. 2 tratta gli aspetti logici del paradosso; mi sembra utile sviluppare un po' l'argomento.

Esistono molti "paradossi relativistici", che per la più gran parte possono essere visti come "ragionamenti sbagliati". Il più classico è il "paradosso dei gemelli", dove l'errore sta nell'applicare simmetricamente la dilatazione del tempo ai due gemelli, dimenticando che almeno uno dei due non può trovarsi in un riferimento inerziale, mentre la dilatazione del tempo nella forma classica vale solo tra riferimenti *inerziali*.[5]

Un altro tratto frequente nei paradossi è l'uso d'ipotesi che vengono sottaciute in quanto date per ovvie, come per es. la "composizione" galileiana delle velocità. In questo caso l'errore non è nel ragionamento, ma nelle premesse.

Il paradosso del condensatore ha però un carattere diverso: qui non c'è nessun ragionamento sbagliato e le premesse sono chiare ed esplicite: meccanica newtoniana e PR, quindi in particolare validità delle equazioni di Maxwell in tutti i riferimenti inerziali. Si conduce il ragionamento in due diversi riferimenti inerziali, e si vede che le conclusioni sono contraddittorie: ciò dimostra che esiste una contraddizione nelle ipotesi, ossia che non si può adottare il PR e conservare inalterata la meccanica newtoniana.

Mi sembra importante che si dedichi del tempo a questi aspetti, di cui ho sottolineato di proposito il carattere *logico*, perché ho esperienza che costituiscono un nodo cognitivo basilare nello studio della relatività (e più in generale della fisica moderna). Credo che il problema sia questo: in tutto lo studio precedente di regola leggi e principi vengono appresi senza riflettere su che cosa c'è di basato sull'esperienza e che cosa si deduce da altre premesse. Per esempio la già citata "composizione galileiana" viene data per scontata e addirittura ovvia, perfino logicamente necessaria; senza aver chiaro che essa si basa su precise assunzioni circa il modo di comportarsi di alcune grandezze fisiche nei cambiamenti di riferimento.

Il paradosso che ho qui esaminato potrebbe servire come esempio del legame necessario che esiste fra diversi concetti e leggi della fisica, e di come perciò non si possano far convivere idee diverse senza chiedersi se non si creano incompatibilità. Nel nostro caso, la validità generale del PR obbliga a modificare la meccanica newtoniana; o viceversa, se si tiene ferma quest'ultima si deve respingere il PR. La logica da sola non può risolvere il dilemma, che è rimesso all'esame dei fatti sperimentali.

Bibliografia

[1] http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
[2] http://www.istruzione.it/allegati/2015/prot13577.zip

[3] Fabri E. “La fisica moderna nella scuola”, *LFnS* **42** (2009), suppl. al n. 3, pag. 3.
[4] http://www.sagredo.eu/PI-14-fismod/Syllabus.pdf
[5] Fabri E. “Insegnare relatività nel XXI secolo”, *Quaderno* 16, *LFnS* **38** (2005), suppl. al n. 1.
[6] http://www.sagredo.eu/divulgazione/relgem/relgem1.htm

Note

[1] Il Syllabus si differenzia dal “Quadro di riferimento”, a parte piccole variazioni di contenuto, nel fatto che mentre il primo si propone come guida per lo svolgimento della materia nel quinto anno (inclusa, come detto, una ripartizione oraria) il secondo si riferisce esclusivamente ai contenuti che potranno essere oggetto della seconda prova d’esame.

[2] Il paradosso è enunciato nella lez. 4; la soluzione è data, usando la dinamica relativistica, come problema n. 5 della lez. 12.

[3] Per una discussione approfondita rimando a Q16, lez. 12.

[4] È appena necessario avvertire che la m in tutte le relazioni che stiamo scrivendo è la *massa invariante*: la cosiddetta “massa relativistica” non ha alcun posto in questi discorsi, ed è mia opinione che vada bandita dall’insegnamento della relatività (v. Q16, lez. 14).

[5] A scanso di equivoci: non sto dicendo che quando compaiono riferimenti accelerati sia necessario ricorrere alla relatività generale. Si tratta di una concezione piuttosto diffusa, ma secondo me errata. Ne ho discusso in [6].

ERRATA CORRIGE

QUADERNO N. 16, LFnS Anno XXXVIII, n. 1 Supplemento, gennaio-marzo 2005

E. Fabri, *Insegnare relatività nel XXI secolo. Dal ‘navilio’ di Galileo all’espansione dell’Universo.*

A **pag. 67**, nella soluzione del Problema 2, si legge:

> «[...] stima la distanza AR al valore $D' = cD/(c - v)$, e la distanza BR al valore $D'' = cD/(c + v)$: [...] la posizione di R spostata verso B, [...] 12 ore dopo, l’errore cambia segno, e il ricevitore appare spostato verso A.»

Questa frase contraddice sia ciò che precede immediatamente, sia ciò che è scritto a pag. 65, subito sotto la fig. 4-3. La frase corretta è:

> «[...] stima la distanza AR al valore $D' = cD/(c + v)$, e la distanza BR al valore $D'' = cD/(c - v)$: [...] la posizione di R spostata verso A, [...] 12 ore dopo, l’errore cambia segno, e il ricevitore appare spostato verso B.»

A **pag. 168** nelle due ultime formule in fondo alla pagina sono saltati alcuni fattori c^2.
Le formule corrette sono:

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = m^2c^4 + c^2p_x^2 + c^2e^2E^2t^2$$

$$v_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2p_x}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + c^2e^2E^2t^2}}$$

L’Autore e la redazione ringraziano gli amici che hanno scoperto e segnalato gli errori.