

Michela Eccher

Istituto d'Arte
"A. Vittoria", Trento

La conservazione dell'energia nel tiro con l'arco

(Pervenuto il 30.12.2009, pprovato il 17.5.2010)

ABSTRACT

The article describes a simple but effective experiment on energy conservation. The experiment was performed in the school physics lab using the Tracker program and an archers' bow.

Introduzione

I ragazzi che frequentano il biennio iniziale della scuola media superiore incontrano notevoli difficoltà nel modellizzare una situazione reale e per loro risulta difficile staccarsi dall'esperienza visto in laboratorio e utilizzare la fisica per interpretare la realtà. Spesso le esperienze di laboratorio che vengono proposte per osservare la conservazione dell'energia meccanica non vengono pienamente comprese ed apprezzate dagli studenti proprio perché risultano lontane dalla loro esperienza.

Sulla base di queste considerazioni, in una classe seconda del liceo scientifico sperimentale, è nata l'idea di presentare la conservazione dell'energia meccanica partendo da una situazione concreta, il tiro con l'arco.

Di seguito vengono descritti l'esperienza e i risultati ottenuti.



Figura 1.

Descrizione

Si costruisce un arco semplice utilizzando un listello di legno di faggio e una corda di nylon: il listello di legno viene inarcato e mantenuto in posizione grazie alla corda tesa.

Noi abbiamo utilizzato un listello con le seguenti dimensioni: lunghezza 128 cm, larghezza 15 mm, spessore 7 mm e una corda di nylon che, quando è montata sull'arco, ha una lunghezza di 125,5 cm.

Si noti che gli archi giocattolo (in plastica) che si trovano in commercio non sono adatti per l'esperienza perché hanno un comportamento poco regolare.

Come freccia si può utilizzare quella di un arco giocattolo; per evitare che la freccia venga scagliata troppo in alto è sufficiente appesantirla con una sferetta o un cilindretto metallico.

Dopo aver fissato l'impugnatura dell'arco ad un sostegno fisso (figura 2), si determina la forza necessaria per tendere l'arco in funzione dell'allungamento Δl con un procedimento analogo a quello per una molla (figura 3) e si calcola l'energia che viene immagazzinata dall'arco quando viene teso di una lunghezza Δl prefissata (trovando l'area sottesa dalla curva della forza per quel determinato allungamento).

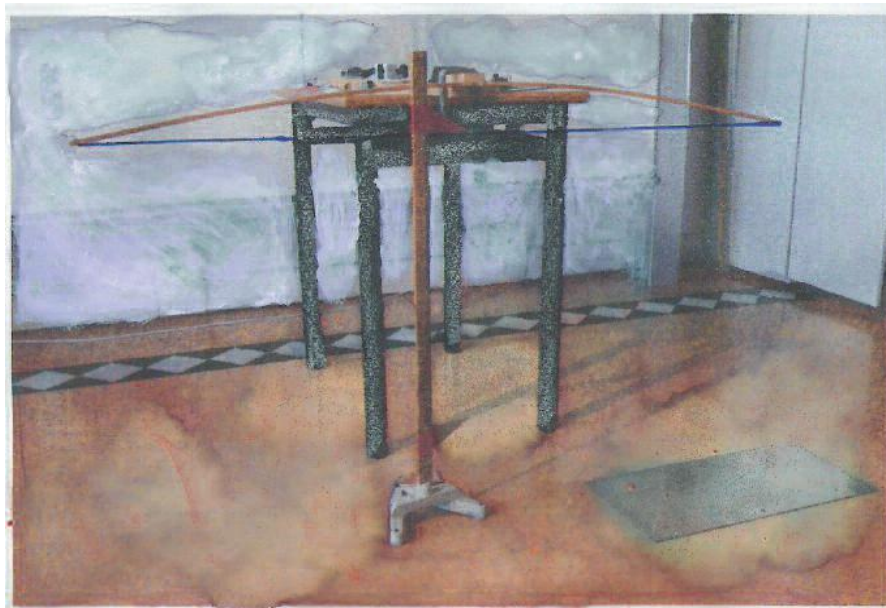


Figura 2. Arco fissato ad un sostegno fisso.

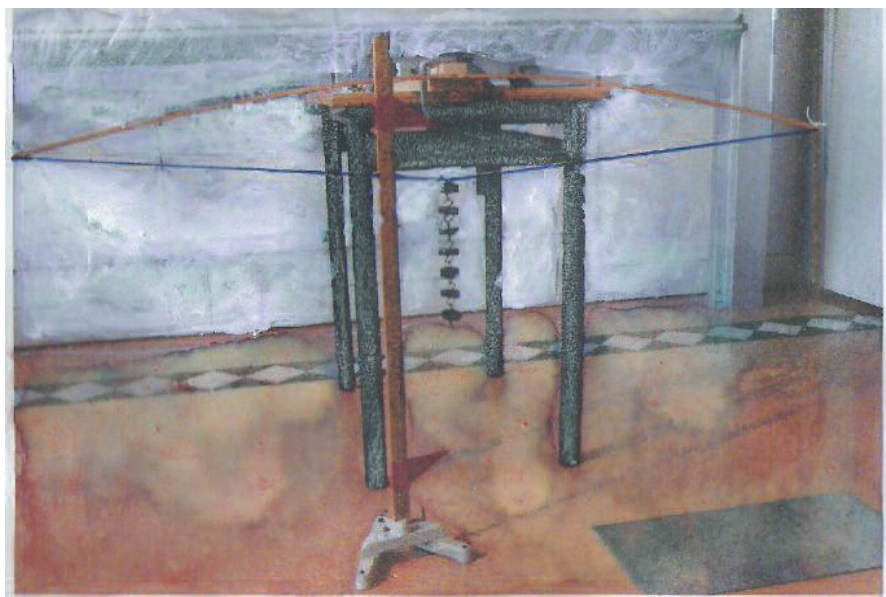


Figura 3. Forza applicata all'arco e suo allungamento.

Si determina la massa della freccia con la bilancia.

Si scaglia la freccia verticalmente (figura 4) e, con l'utilizzo di *Tracker* (Software libero realizzato da Douglas Brown e scaricabile sul sito <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>), si determina la posizione e la velocità della freccia durante il lancio. Si calcola quindi l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica della freccia in ogni istante.



Figura 4. Posizione di lancio della freccia (corrisponde alla posizione 1).

L'arco viene tolto dal sostegno per poter determinare la sua massa e lo spostamento del suo baricentro nel passare dalla posizione in cui è teso della lunghezza Δl alla posizione di riposo.

Questo permette di determinare la variazione di energia potenziale gravitazionale dell'arco durante il lancio.

Per lo spostamento del baricentro si procede determinando il baricentro dell'arco non teso e dell'arco teso col metodo del filo a piombo (figura 5 e 6); tale misura sarà affetta da un errore sistematico per eccesso dovuto alla massa dell'asticciola, mostrata in fig. 3, che sposta la posizione del baricentro misurato ad arco teso verso destra, fornendo ΔH maggiore.

Misure e calcoli

Misuriamo l'allungamento prodotto dalla forza applicata all'arco:

- Si carica l'arco con una successione crescente di masse appese al centro della corda. Noi abbiamo usato la sequenza: 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000, 1.200, 1.500 grammi, e abbiamo assunto l'accelerazione di gravità valere $9,805 \text{ m/s}^2$.
- Si misura l'allungamento corrispondente
- Si riportano i valori in una tabella.

L'incertezza sulla forza non viene riportata, poiché trascurabile rispetto a quella su Δl .

Δl (m)	F(N)	Δl (m)	F(N)
0,020 ± 0,002	1,961	0,122 ± 0,002	7,844
0,032 ± 0,002	2,922	0,145 ± 0,002	8,825
0,046 ± 0,002	3,922	0,170 ± 0,002	9,805
0,062 ± 0,002	4,903	0,227 ± 0,002	11,766
0,080 ± 0,002	5,883	0,295 ± 0,002	14,708
0,100 ± 0,002	6,864		



Figura 5. Ricerca del baricentro quando l'arco non è teso.



Figura 6. Ricerca del baricentro con l'arco teso (è stata inserita un'asticella che produce un allungamento dell'arco pari a Δl).

L'arco ha un comportamento simile a quello di una molla con pretensione: il grafico della forza in funzione dell'allungamento (ottenuto con *Excel*) risulta assimilabile a quello di una retta non passante per l'origine (per allungamenti non troppo grandi).

Per il nostro arco la retta migliore che approssima i dati sperimentali ha equazione:

$$F = 44,845 \text{ N/m} \times \Delta l + 1,921 \text{ N} \quad (R^2 = 0,986)$$

considerando allungamenti tra 0,020 m e 0,295 m.

Massa freccia = (0,107 ± 0,001) kg	$e_{\%mf} = 0,9 \%$
Massa dell'arco = (0,080 ± 0,001) kg	$e_{\%m a} = 1,3 \%$
Allungamento $\Delta l = (0,250 \pm 0,005) \text{ m}$	$e_{\%\Delta l} = 2 \%$
Variaz. di altezza del baricentro dell'arco $\Delta h_{\text{baricentro}} = (0,145 \pm 0,005) \text{ m}$	$e_{\%\Delta G} = 3,4 \%$

Calcoliamo l'energia potenziale elastica immagazzinata dall'arco (U_e) per un allungamento di 25cm (corrisponde all'area di un trapezio) e l'incertezza percentuale e assoluta:

$$U_e = 0,250 \text{ m} \times [1,921 \text{ N} + (44,845 \text{ N/m} \times 0,250 \text{ m} + 1,921 \text{ N})] / 2 = 1,882 \text{ J}$$

$$e_{\%} = 2 \times e_{\%\Delta l} = 2 \times 2 \% = 4 \%$$

$$\Delta U_e = e_{\%} \times U_e = 4 \% \times 1,882 \text{ J} = 0,075 \text{ J} .$$

Calcoliamo l'energia potenziale gravitazionale che viene acquistata dall'arco ($U_{g(\text{arco})}$) quando ritorna nella posizione di riposo con l'incertezza percentuale e assoluta:

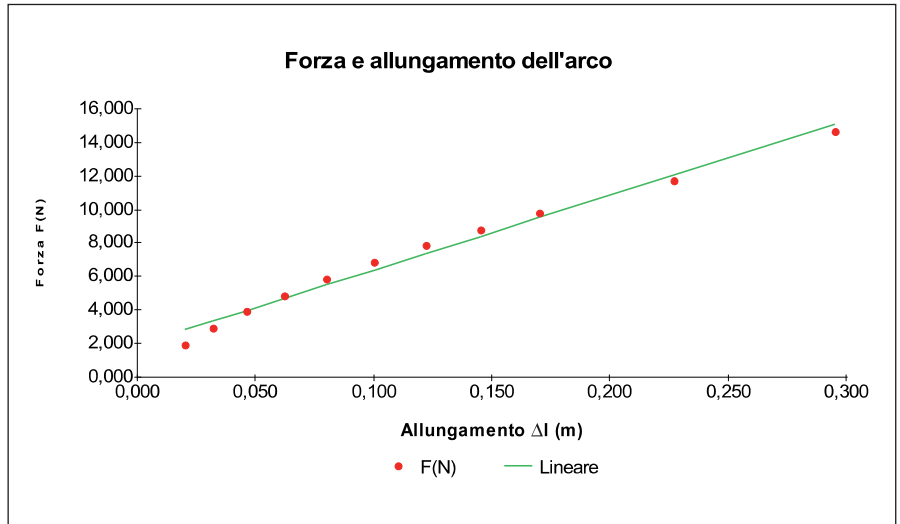


Figura 7. Grafico della forza F applicata alla corda in funzione dell'allungamento Δl .

$$U_{g(\text{arco})} = m_{\text{arco}} \times g \times \Delta h_{\text{baricentro}} = 0,080 \text{ kg} \times 9,810 \text{ m/s}^2 \times 0,145 \text{ m} = 0,114 \text{ J}$$

$$e_{\%} = e_{\%ma} + e_{\% \Delta G} = 1,3\% + 3,4\% = 4,7\%$$

$$\Delta U_{g(\text{arco})} = e_{\%} \times U_{g(\text{arco})} = 4,7\% \times 0,114 \text{ J} = 0,005 \text{ J}$$

Filmiamo il lancio della freccia e lo analizziamo con il software Tracker, che fornisce posizione e velocità di un punto che si muove in due dimensioni al passare del tempo. Le velocità sono velocità medie calcolate su un intervallo di tempo Δt determinato dal numero di fotogrammi del filmato. Noi scegliamo di acquisire 60 fotogrammi al secondo ($\Delta t = 1\text{s}/60$) e quindi le velocità fornite dal programma nelle diverse posizioni della freccia (durante la salita) sono leggermente superiori alle effettive velocità istantanee.

Nella tabella vengono riportate, a titolo di esempio, le misure ottenute in una prova e il calcolo delle rispettive energie. (Le misure sono ripetibili).

La riga "1" si riferisce all'arco teso (posizione iniziale con freccia ferma), la riga "2" all'istante in cui viene scoccata la freccia (dove la velocità è massima), la riga "3" all'istante in cui la freccia si trova nella posizione più in alto registrata dai fotogrammi che compongono il filmato (dove la velocità risulta più vicina a zero).

Dati ottenuti (altezza e velocità della freccia) e calcolo dell'energia totale:

	$h_{\text{freccia}} \text{ (m)}$	$v_{\text{freccia}} \text{ (m/s)}$	$U_{\text{freccia}} \text{ (J)}$	$K_{\text{freccia}} \text{ (J)}$	$U_e \text{ (J)}$	$U_{g(\text{arco})} \text{ (J)}$	$E_{\text{tot}} \text{ (J)}$
1	0,000	0,000	0,000	0,000	1,882±0,075 (4%)	0,000	1,882± 0,075 (4%)
2	0,276±0,010 (3,6%)	5,260±0,009 (0,2%)	0,289±0,013 (4,5%)	1,480±0,019 (1,3%)	0,000	0,114±0,005 (4,7%)	1,883±0,037 (2%)
3	1,636±0,010 (0,6%)	0,090±0,300	1,716±0,026 (1,5%)	0,000±0,003	0,000	0,114±0,005 (4,7%)	1,830±0,034 (1,9%)

Dove:

- $U_{freccia}$ è l'energia potenziale gravitazione della freccia. $U_{freccia} = m \times g \times h$.
- $K_{freccia}$ è l'energia cinetica della freccia. $K_{freccia} = (1/2) m \times v^2$.
- U_e è l'energia potenziale elastica dell'arco.
- $U_{g(arco)}$ è l'energia potenziale gravitazione dell'arco.
- E_{tot} è l'energia totale del sistema arco-freccia. $E_{tot} = U_{freccia} + K_{freccia} + U_e + U_{g(arco)}$.

Nota: L'energia cinetica della freccia $K_{freccia}$ nella riga "3" è stata approssimata a zero in quanto risulta trascurabile rispetto ai valori delle altre energie che compaiono (il valore che si ottiene attraverso il calcolo è di circa 0,0004 J con un'incertezza di 0,003 J).

Dalla tabella si osserva che l'energia totale si è conservata: i valori ottenuti all'inizio (riga "1"), quando la freccia viene scoccata (riga "2") e quando la freccia raggiunge l'altezza massima rilevata dal filmato (riga "3"), sono compatibili.

Possiamo concludere che l'energia totale si conserva ed inoltre l'incertezza sull'energia totale è abbastanza piccola (massimo 4%).

Si può inoltre osservare che l'energia totale che possiede la freccia quando viene scoccata (riga "2") è circa uguale all'energia totale che possiede quando raggiunge l'altezza massima rilevata (riga "3"). Tra i due valori trovati c'è una differenza del 3-4% e questo ci permette di dire che la resistenza dell'aria è piccola in questo tipo di esperimento (perché la superficie di impatto della freccia con l'aria è piccola, la velocità della freccia non è elevata e la distanza che viene percorsa è breve).

Osservazione: risulta difficile valutare le incertezze sulle altezze e le velocità raggiunte dalla freccia poiché queste dipendono da quanto accuratamente vengono segnati i punti di riferimento nei diversi fotogrammi.

Tenendo conto che la punta della freccia è stata segnata (per renderla più visibile) con un nastro nero largo 0,010 m, sembra ragionevole un'incertezza sul punto segnato di 0,005 m e quindi un'incertezza sull'altezza della freccia di 0,010 m.

È possibile ricavare l'incertezza sulla velocità calcolando di quanto varia la velocità quando l'altezza della freccia è 0,005 m sotto e 0,005 m sopra la posizione considerata.

In base ai dati forniti dal programma ricaviamo un'incertezza media di 0,009 m/s sulla velocità massima e un'incertezza media di 0,300 m/s sulla velocità minima.

Conclusioni

Questo esperimento mette in evidenza come l'energia potenziale elastica immagazzinata dall'arco in seguito alla sua deformazione venga trasformata in energia cinetica della freccia (la maggior parte) e in energia potenziale gravitazionale dell'arco (in realtà una piccola parte di energia viene spesa per far vibrare l'arco dopo che la freccia è stata scoccata). Successivamente l'energia cinetica della freccia si trasforma quasi interamente in energia potenziale gravitazionale della freccia stessa e solo una piccola parte viene spesa per vincere la resistenza dell'aria.

L'esperimento con l'arco, visti i buoni risultati ottenuti, può essere un valido strumento per lo studio della conservazione dell'energia meccanica ed inoltre permette ai ragazzi di vedere una applicazione concreta della fisica nello sport.